

教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

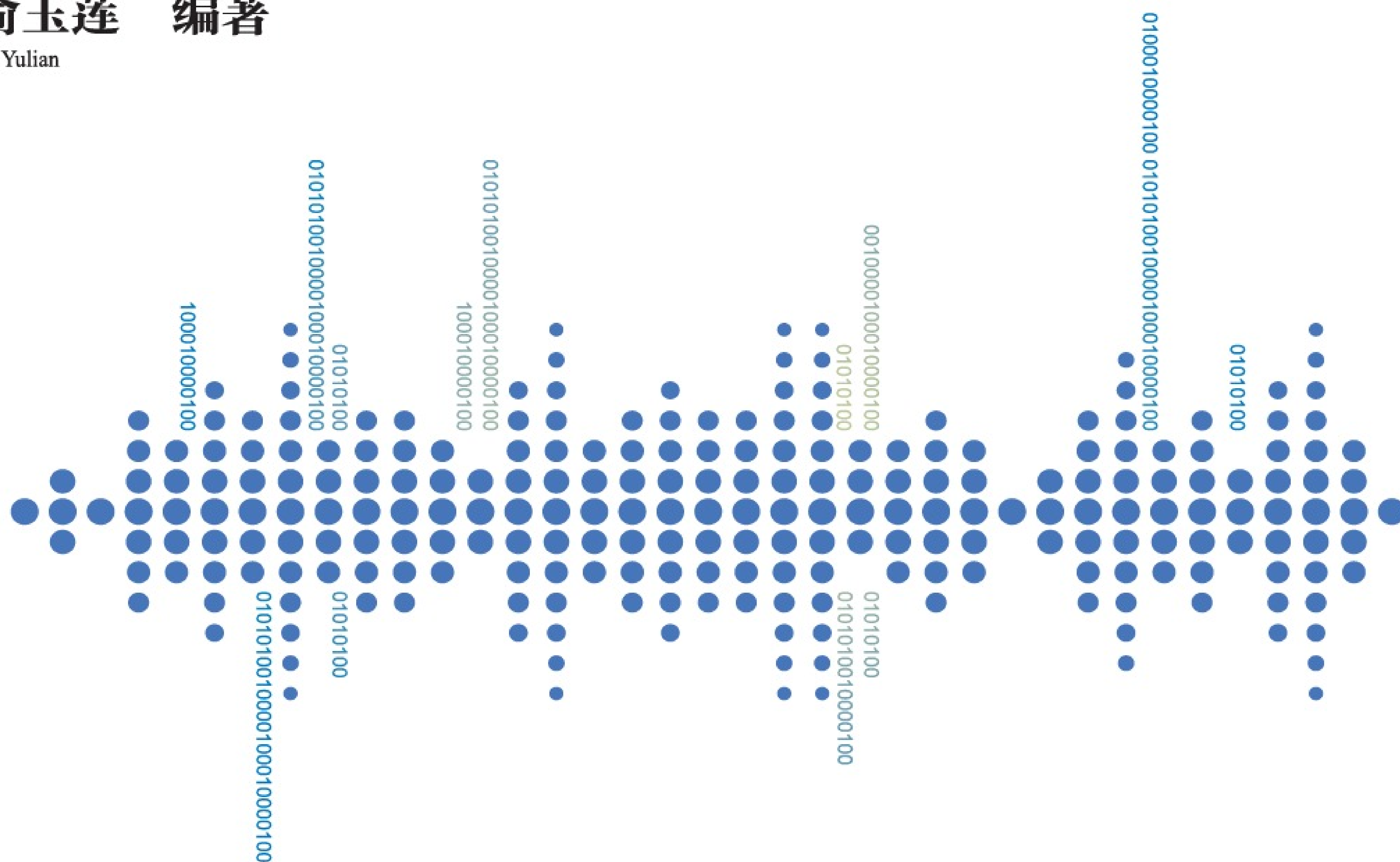
信息与通信工程

Digital Signal Processing: Learning Guide and Problem Solution

数字信号处理原理和算法实现（第3版）

学习指导与习题解答

李莉 胡之惠 俞玉莲 编著
Li Li Hu Zhihui Yu Yulian



清华大学出版社

教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材
高等学校电子信息类专业系列教材

数字信号处理原理和算法实现（第3版）学习指导与习题解答

李莉　胡之惠　俞玉莲　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是《数字信号处理原理和算法实现(第 3 版)》(李莉主编,清华大学出版社,以下简称“教材”)一书的配套辅导材料,与教材各章对应,又相对独立。除绪论外,其余各章分“重点内容”和“习题解答”两部分。“重点内容”部分简要归纳了教材各章的主要内容、应掌握的基本概念和算法。“习题解答”部分给出了教材习题的详细参考解答,对进一步理解和巩固所学理论、提高分析解决问题的能力有很大帮助。

本书可作为通信工程、电子信息、计算机应用技术、自动控制等相关专业本科生教学用书,也可作为教师教学和从事数字信号处理工作的工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理原理和算法实现(第 3 版)学习指导与习题解答/李莉,胡之惠,俞玉莲编著.—北京:清华大学出版社,2019
(高等学校电子信息类专业系列教材)
ISBN 978-7-302-50025-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… ②胡… ③俞… Ⅲ.①数字信号处理-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 081269 号

责任编辑: 梁 颖
封面设计: 李召霞
责任校对: 焦丽丽
责任印制: 杨 艳

出版发行: 清华大学出版社
网 址: http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编:** 100084
社 总 机: 010-62770175 **邮 购:** 010-62786544
投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载: http://www.tup.com.cn,010-62795954
印 装 者: 北京富博印刷有限公司
装 订 者: 北京市密云县京文制本装订厂
经 销: 全国新华书店
开 本: 185mm×260mm **印 张:** 12.75 **字 数:** 311 千字
版 次: 2019 年 1 月第 1 版 **印 次:** 2019 年 1 月第1 次印刷
定 价: 39.00 元

产品编号:078380-01

序

FOREWORD

我国电子信息产业销售收入总规模在2013年已经突破12万亿元，行业收入占工业总体比重已经超过9%。电子信息产业在工业经济中的支撑作用凸显，更加促进了信息化和工业化的高层次深度融合。随着移动互联网、云计算、物联网、大数据和石墨烯等新兴产业的爆发式增长，电子信息产业的发展呈现了新的特点，电子信息产业的人才培养面临着新的挑战。

(1) 随着控制、通信、人机交互和网络互联等新兴电子信息技术的不断发展，传统工业设备融合了大量最新的电子信息技术，它们一起构成了庞大而复杂的系统，派生出大量新兴的电子信息技术应用需求。这些"系统级"的应用需求，迫切要求具有系统级设计能力的电子信息技术人才。

(2) 电子信息系统设备的功能越来越复杂，系统的集成度越来越高。因此，要求未来的设计者应该具备更扎实的理论基础知识和更宽广的专业视野。未来电子信息系统的设计越来越要求软件和硬件的协同规划、协同设计和协同调试。

(3) 新兴电子信息技术的发展依赖于半导体产业的不断推动，半导体厂商为设计者提供了越来越丰富的生态资源，系统集成厂商的全方位配合又加速了这种生态资源的进一步完善。半导体厂商和系统集成厂商所建立的这种生态系统，为未来的设计者提供了更加便捷却又必须依赖的设计资源。

教育部2012年颁布了新版《高等学校本科专业目录》，将电子信息类专业进行了整合，为各高校建立系统化的人才培养体系，培养具有扎实理论基础和宽广专业技能的、兼顾"基础"和"系统"的高层次电子信息人才给出了指引。

传统的电子信息学科专业课程体系呈现"自底向上"的特点，这种课程体系偏重对底层元器件的分析与设计，较少涉及系统级的集成与设计。近年来，国内很多高校对电子信息类专业课程体系进行了大力度的改革，这些改革顺应时代潮流，从系统集成的角度，更加科学合理地构建了课程体系。

为了进一步提高普通高校电子信息类专业教育与教学质量，贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》和《教育部关于全面提高高等教育质量若干意见》(教高【2012】4号)的精神，教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会开展了"高等学校电子信息类专业课程体系"的立项研究工作，并于2014年5月启动了《高等学校电子信息类专业系列教材》(教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会规划教材)的建设工作。其目的是为推进高等教育内涵式发展，提高教学水平，满足高等学校对电子信息类专业人才培养、教学改革与课程改革的需要。

本系列教材定位于高等学校电子信息类专业的专业课程，适用于电子信息类的电子信

息工程、电子科学与技术、通信工程、微电子科学与工程、光电信息科学与工程、信息工程及其相近专业。经过编审委员会与众多高校多次沟通，初步拟定分批次（2014—2017年）建设约100门课程教材。本系列教材将力求在保证基础的前提下，突出技术的先进性和科学的前沿性，体现创新教学和工程实践教学；将重视系统集成思想在教学中的体现，鼓励推陈出新，采用“自顶向下”的方法编写教材；将注重反映优秀的教学改革成果，推广优秀的教学经验与理念。

为了保证本系列教材的科学性、系统性及编写质量，本系列教材设立顾问委员会及编审委员会。顾问委员会由教指委高级顾问、特约高级顾问和国家级教学名师担任，编审委员会由教育部高等学校电子信息类专业教学指导委员会委员和一线教学名师组成。同时，清华大学出版社为本系列教材配置优秀的编辑团队，力求高水准出版。本系列教材的建设，不仅有众多高校教师参与，也有大量知名的电子信息类企业支持。在此，谨向参与本系列教材策划、组织、编写与出版的广大教师、企业代表及出版人员致以诚挚的感谢，并殷切希望本系列教材在我国高等学校电子信息类专业人才培养与课程体系建设中发挥切实的作用。

吕志伟 教授

前言

PREFACE

随着信息技术的发展，数字信号处理基础知识已成为通信工程、电子信息、计算机应用技术等相关专业本科学生必须学习和掌握的专业基础知识。许多院校都在相关学科、专业开设了数字信号处理类课程。本书是《数字信号处理原理和算法实现(第3版)》(李莉主编，清华大学出版社，以下简称"教材")的配套辅导材料，以方便学习这类课程、参考这类教材的人员更好地掌握教材基础知识并学习用基础理论分析问题的方法和基本运算技能。本书也可作为教师授课时的教学参考书。

本书各章与教材各章一一对应。除绪论外，本书其余各章分"重点内容"和"习题解答"两部分。其中"重点内容"部分的公式、图、表等以本书的章节为序编号，使本书既与教材有密切关系，又具有相对的独立性；"习题解答"部分给出了教材中所有习题的参考解答，许多习题都通过MATLAB软件编程实现计算和绘图，希望起到抛砖引玉的作用，提倡读者去探索其他多种解法。

本书由李莉负责统稿、审阅，其中"重点内容"部分由胡之惠编写，"习题解答"部分由俞玉莲编写。

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请使用本书的老师和读者不吝指正。

编　者

2018年2月于上海

目录

CONTENTS

绪　　论

数字信号处理(digital signal processing, DSP),是把信号用数字或符号表示成序列,通过计算机或通用(专用)信号处理设备,用数值计算方法进行各种处理,以达到提取有用信息便于应用的目的。

关于DSP,可狭义理解为digital signal processor(数字信号处理器);广义理解为digital signal processing(数字信号处理技术)。本书讨论的DSP是指广义的理解。

0.1　概述

信号(signal)是一种物理体现,或是传递信息的函数。信息是信号的具体内容。

数字信号:时间和幅度都经过"量化"的信号。

数字系统:反映或表示数字信号处理输入输出(I/O)关系的器件或运算的物理设备。

数字信号处理系统的基本组成如图0-1所示,系统首先把模拟信号变换成数字信号,之后用数字技术进行处理,然后再还原成模拟信号。其中,"数字信号处理器"模块中的核心内容为数字滤波器和(或)快速傅里叶变换(fast Fourier transformation,FFT)算法。

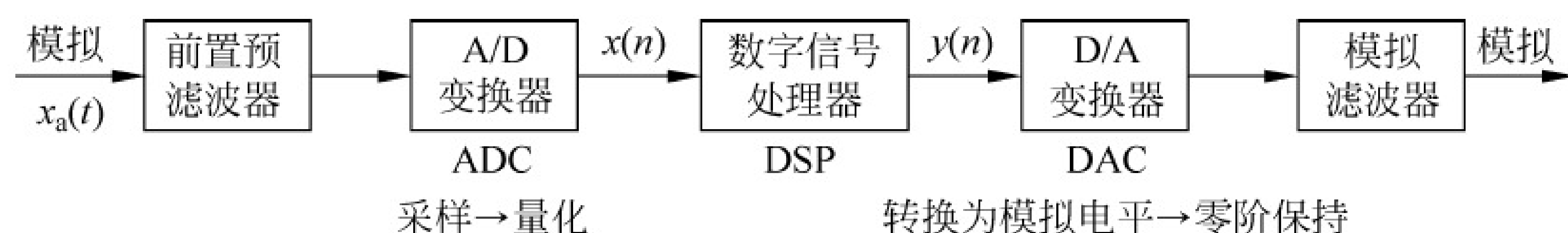


图0-1　数字信号处理系统的基本组成

0.2　数字信号处理的特点

由于数字信号在数字芯片、计算机中用有限位的编码序列表述,可以根据应用需要选定合适的字长等;而特定功能的数字信号处理算法可用数字器件构成合适的数字处理系统,所以数字信号处理具有灵活性强、高精度性和稳定性特点。随着大规模集成电路技术的发展,数字信号处理器便于大规模集成,可用于对数字信号进行存储、传输和处理。

0.3　数字信号处理学科的内容

广义上讲,数字信号处理可涵盖的内容如下:

- 信号的采集:包括模拟/数字(A/D)转换技术与数字/模拟(D/A)转换技术、采样定

理和量化噪声理论等。
- 离散时间信号分析：离散时间信号时域及频域分析、离散傅里叶变换(DFT)理论。
- 离散时间系统分析与设计。
- 信号处理的快速算法：谱分析与快速傅里叶变换(FFT)，快速卷积与相关算法。
- 滤波技术。
- 信号的估计：各种估值理论、相关函数与功率谱估计。
- 信号的压缩：语音压缩、图像压缩、视频压缩和多媒体数据压缩。
- 随机信号的建模：包括自回归(auto-regressive，AR)模型，滑动平均(moving average，MA)模型，自回归滑动平均(auto-regressive and moving average，ARMA)模型等。
- 其他特殊算法：同态处理、抽取与内插和信号重建等。
- 数字信号处理的实现。
- 数字信号处理的应用。

0.4　数字信号处理的实现

软件实现方法：按原理和方法编程序在通用计算机上实现。

硬件实现方法：按要求和算法，设计硬件结构图，用数字乘法器、数字加法器、延时器，辅以控制器、存储器，I/O 接口实现。

上述两大类数字信号处理的实现，具体方案主要特点：
- 采用大、中型计算机和微机：在工作站和微机上安装有关厂家的数字信号处理软件，如各种图像压缩和解压软件。
- 用单片机：可根据不同环境配不同单片机，实现实时控制，但数据运算量不能太大。
- 利用通用 DSP 芯片：DSP 芯片较之单片机有突出优点。如内部带有乘法器，累加器，采用流水线工作方式及并行结构，多总线速度快。配有适于信号处理的指令(如 FFT 指令)等。国内外许多芯片厂商生产各自特点的通用 DSP 芯片。
- 利用特殊用途的 DSP 芯片：市场上推出专门用于 FFT，有限脉冲响应(FIR)数字滤波器，卷积运算、相关运算等专用数字芯片。芯片内部已经用硬件电路实现了软件算法，使用者只需给出输入数据，就可在输出端直接得到所需数据。

0.5　数字信号处理系统的应用领域

数字信号处理大致可分为信号分析和信号滤波。

信号分析涉及信号特性的测量，主要应用于：谱(频率和/或相位)分析、语音分析和识别、目标检测等；最基本的信号特性是其频域特性。

信号滤波就是在形形色色的信号中提取所需要的信号，抑制不需要的信号或干扰信号。例如消除信息在传输过程中由于信道不理想所产生的失真；滤除不需要的背景噪声；去除干扰；频带分割；信号谱的成形。

数字信号处理广泛地应用于数字通信，雷达，遥感，声呐，语音合成，图像处理，测量与控制，高清晰度电视，多媒体物理学，生物医学，机器人，地球物理，地质勘探，航空航天等领域，并有效地推动了众多工程技术领域的技术进步和学科发展。

第 1 章 离散时间信号和系统

CHAPTER 1

1.1 重点内容

1.1.1 概述

信号通常是一个自变量或几个自变量的函数。

- 一维信号：仅有一个自变量。
- 多维信号：有两个及以上的自变量。
- 离散时间信号：时间域离散的信号，如对连续信号时域采样所得的信号。
- 数字信号：信号的函数值被量化，并用一定比特的编码表示的时域离散信号；或由数字传感器直接采集得到的数字信号。例如，数字序列 $x(n)$、电荷耦合元件(charge-coupled device，CCD)得到的图像信号等。

1.1.2 时域离散信号

1. 模拟信号的采样、序列

对模拟信号 $x_a(t)$，在时刻 $t=nT$ 进行理想采样(T 为采样时间间隔)，采样输出就是时域离散信号：

$$x(n) \equiv x_a(nT) = x_a(t)\,|_{t=nT}, \quad -\infty < n < \infty \tag{1.1.1}$$

$x_a(nT)$称为模拟信号的采样，是一个有序的离散时间序列：$\cdots, x_a(-T), x_a(0), x_a(T), \cdots$，$nT$ 代表前后顺序。当忽略模拟信号数字化过程中的量化误差、编码误差时，$x_a(nT)$可理想地定义为数字信号 $x(n)$，并简称为“序列”。

特别提示： n 是采样信号的顺序号，是整数，无量纲。理想条件下，序列的值等于模拟信号 $x_a(t)$的采样值，可以有量纲。

2. 常用典型序列

1) 单位采样脉冲序列(单位脉冲序列，时域离散冲激)$\delta(n)$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.1.2}$$

$\delta(n)$波形如图 1-1 所示，仅在 $n=0$ 时取值为 1，其他序号处均为零。

2）单位阶跃序列 $u(n)$

$$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases} \tag{1.1.3}$$

$u(n)$波形如图 1-2 所示。

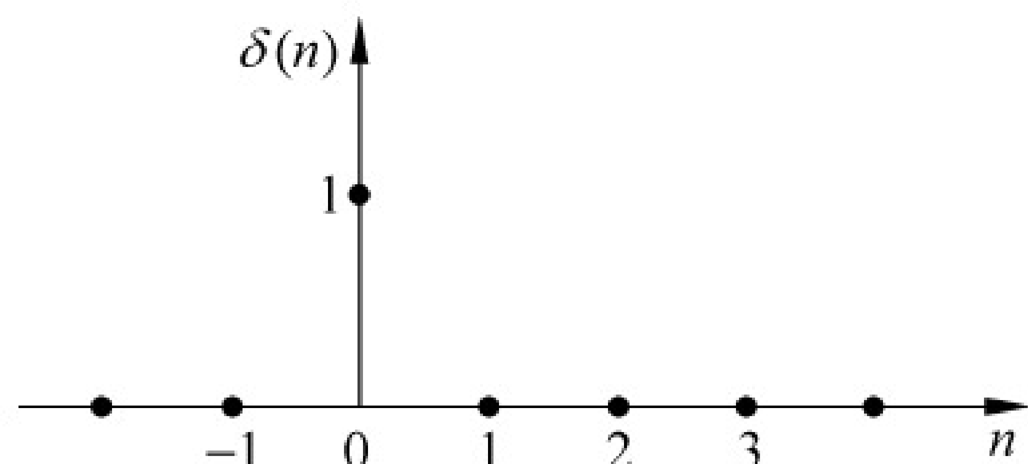


图 1-1　单位采样脉冲序列

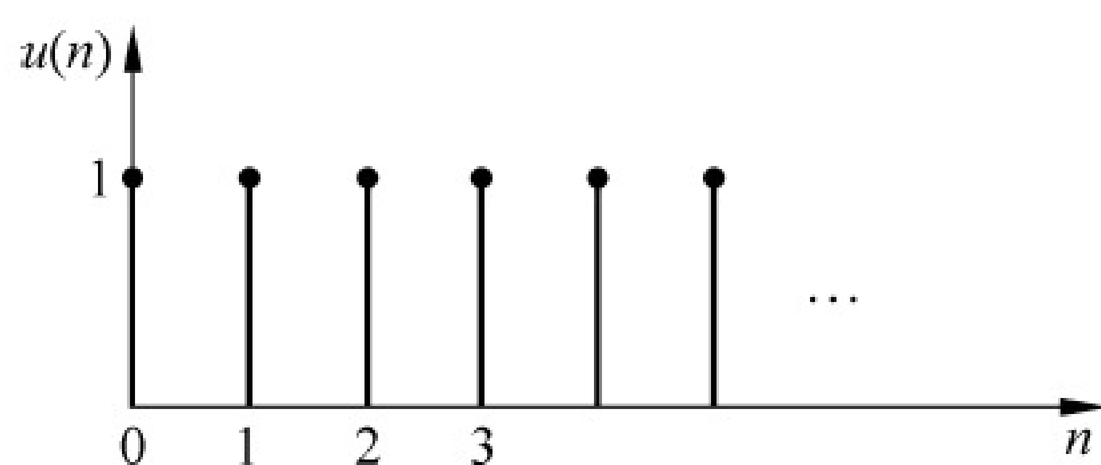


图 1-2　单位阶跃序列

3）单位矩形序列 $R_N(n)$

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & n<0,\ n\geqslant N\end{cases} \tag{1.1.4}$$

其中，N 为 $R_N(n)$的长度。

当 $N=4$ 时，序列 $R_4(n)$的波形如图 1-3 所示。

4）实指数序列

$$x(n)=a^n u(n),\quad a\text{ 为实数} \tag{1.1.5}$$

实指数序列波形示例如图 1-4 所示。

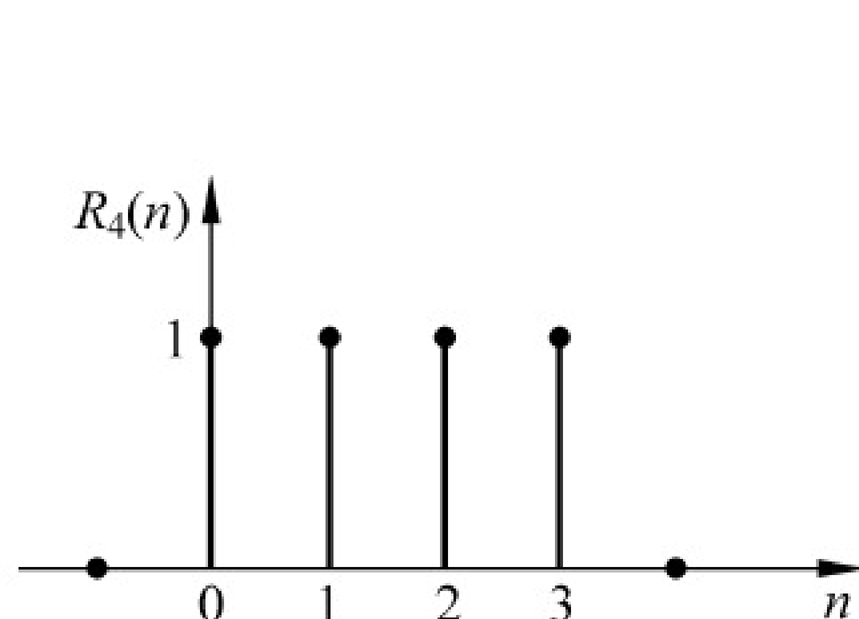
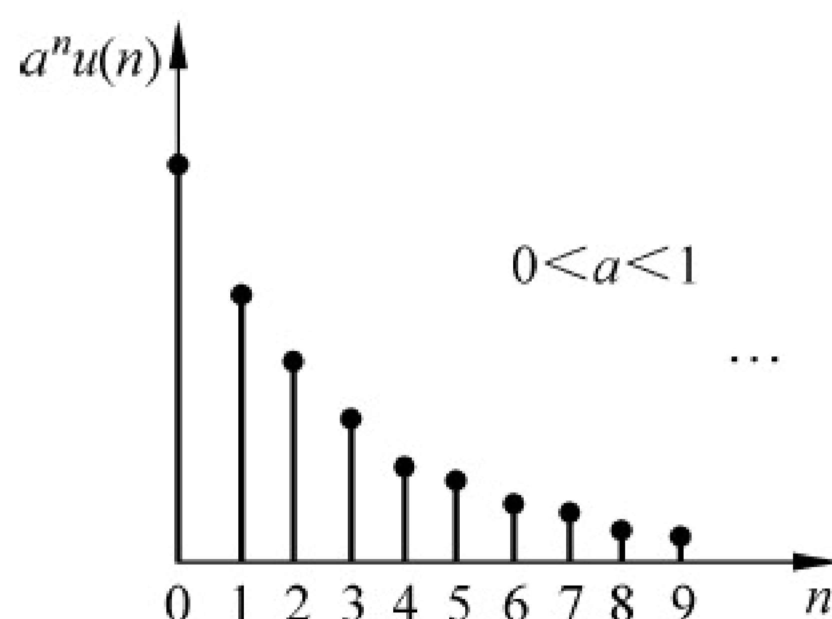


图 1-3　单位矩形序列 $R_4(n)$



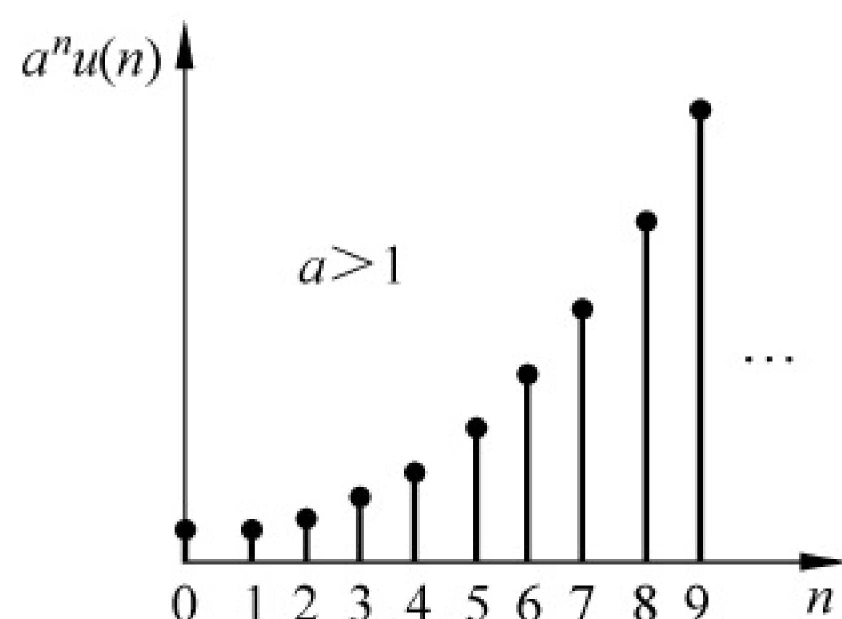


图 1-4　实指数序列

5）正弦序列

正弦序列 $x(n)$的基本形式如式(1.1.6)，A 为振幅；ω_0称为正弦序列的数字域频率，简称“数字频率”，单位是弧度(rad)，φ_0为初始相位。

$$x(n)=A\sin(n\omega_0+\varphi_0) \tag{1.1.6}$$

序列 $x(n)=\sin\left(\frac{1}{4}\pi n\right)$的波形如图 1-5 所示。

6）复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega_0)n} \tag{1.1.7}$$

其中，ω_0为数字域频率，单位为弧度。因 n 为整数，当 $\sigma=0$ 时，复指数序列有恒等关系：

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0+2\pi M)n}=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n},\quad M\text{ 为整数}$$

即纯虚复指数序列在“数字频率域”是周期性的，周期为 2π。复指数序列 $x(n)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{6}n}$前 8 个数据点在复平面上的位置如图 1-6 所示，可理解为复指数序列值的极坐标表示。

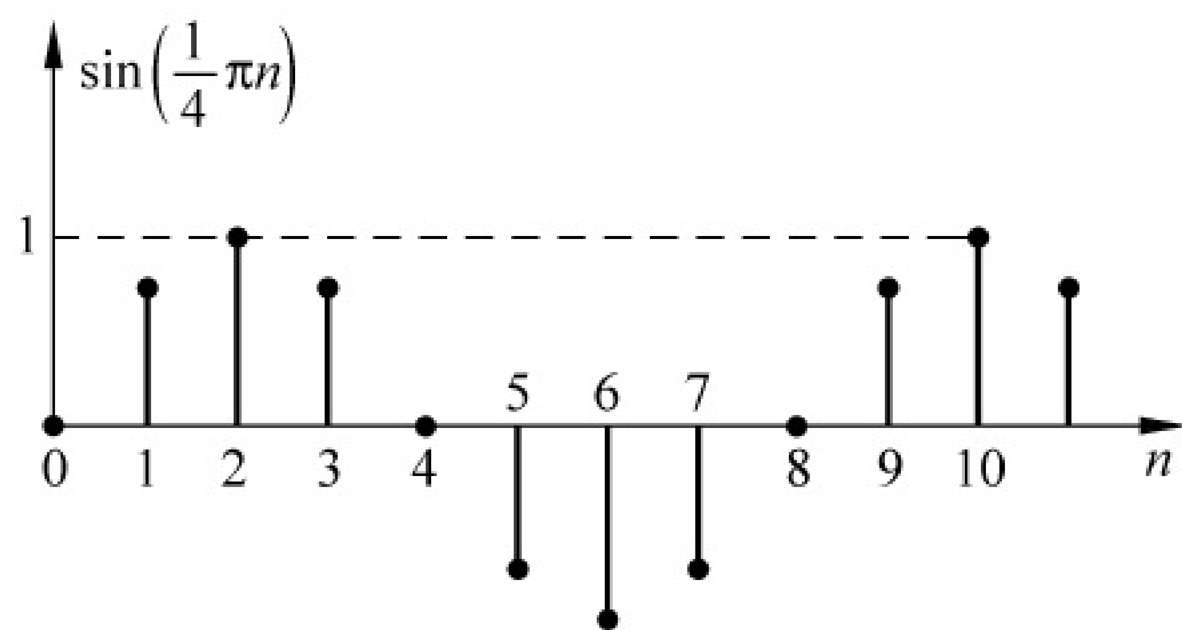


图 1-5　正弦序列

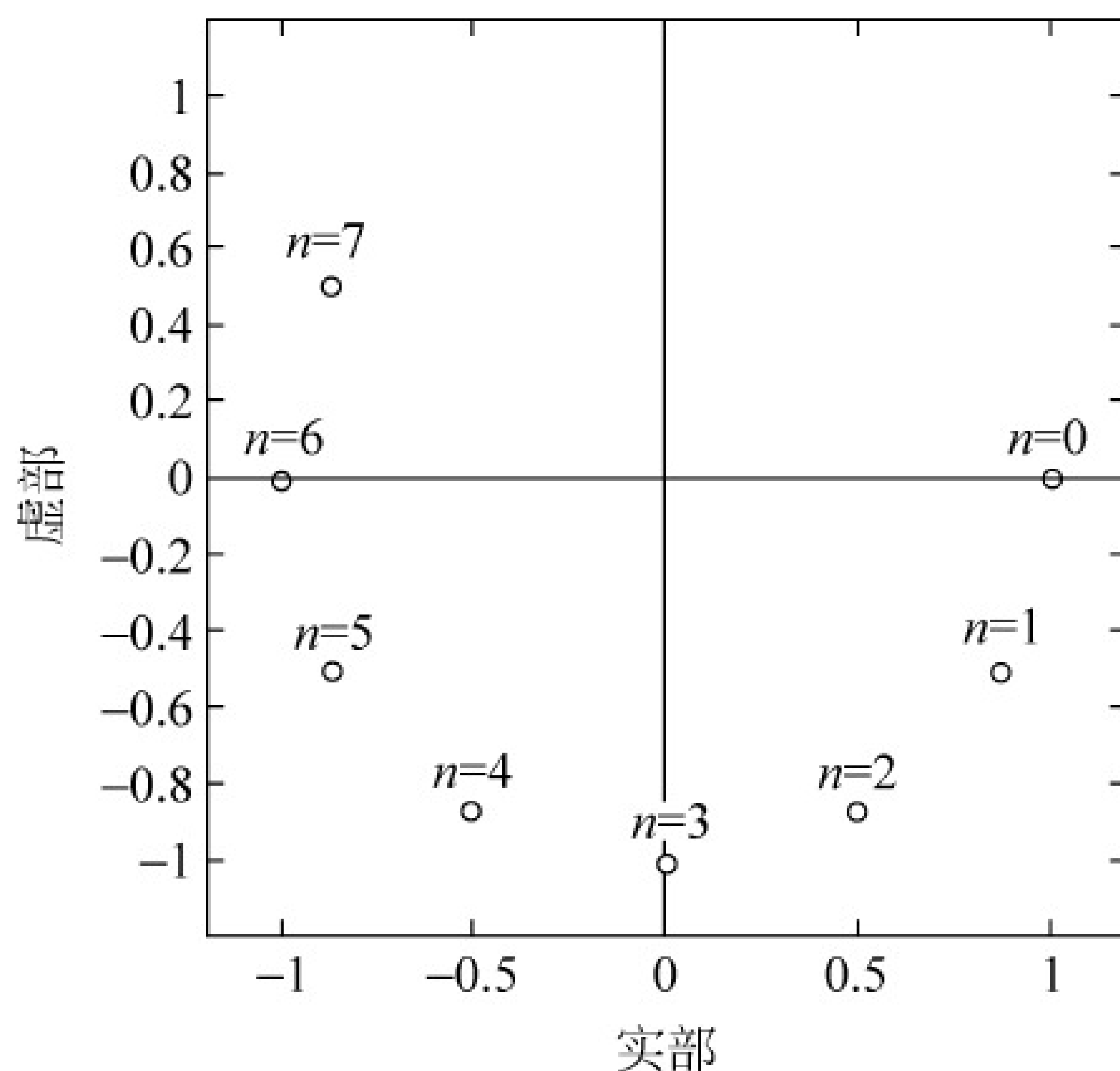


图 1-6　$x(n)=e^{-j\frac{\pi}{6}n}$复指数序列(在复平面上的前 8 个值)

7）周期序列

给定序列 $x(n)$,对所有整数 n 存在满足式(1.1.8)的最小正整数 N,则称 $x(n)$是周期为 N 的周期序列。

$$x(n) = x(n+N),\quad -\infty < n < \infty \tag{1.1.8}$$

特别提示：

- 连续时间域中,模拟正弦信号在时域总是周期的。
- 离散时间域中,正弦序列并不都是周期序列。

(1) 正弦序列的周期性。设正弦序列存在关系式：

$$\sin[\omega_0(n+N)] = \sin(\omega_0 n + \omega_0 N) \tag{1.1.9}$$

当$|\omega_0|N=2\pi k$(k 为某最小的非零正整数时),该序列是周期性的,周期是 $N=\frac{2\pi}{|\omega_0|}k$,$N$,$k$ 均为正整数,且是互质的。

当整数 N 不存在时,该正弦序列是非周期的。

(2) 复指数序列的周期性。因为任意复指数序列 $x(n)$可写成：

$$x(n) = e^{(\sigma+j\omega_0)n} = e^{\sigma n}(\cos\omega_0 n + j\sin\omega_0 n) \tag{1.1.10}$$

$\sigma\neq 0$ 时,$x(n)$不是时域周期序列。$\sigma=0$ 时,$x(n)$周期性判别原则同正弦序列。

特别提示：

- 对正弦序列、复指数序列，不管序列在时域是否有周期性，参数 ω_0 均称为序列的“数字频率”，单位为弧度(rad)。
- 因为正弦序列、纯虚指数序列在“数字频率域”有 2π 的周期性，故不失一般地，研究这两类信号的频域特性只须取 $0 \leqslant \omega_0 \leqslant 2\pi$。

3. 序列的运算

1）乘法、加减法

序列之间的乘法、加减法，是指同一序号的序列值对应相乘或相加减得到新序列。

2）移位、翻转、尺度变换

(1) 移位：

$$y(n) = x(n - n_0), \quad n_0 \text{ 为整数} \tag{1.1.11}$$

$n_0 > 0$，序列 $x(n)$ 右移 n_0 个采样时间间隔(延时)；

$n_0 < 0$，序列 $x(n)$ 左移 $|n_0|$ 个采样时间间隔(超前)。

基于序列移位运算，单位采样脉冲序列 $\delta(n)$ 与单位阶跃序列 $u(n)$ 的关系如式(1.1.12)和式(1.1.13)所示。

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1) \tag{1.1.12}$$

$$u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k) \tag{1.1.13}$$

单位矩形序列 $R_N(n)$ 与单位阶跃序列 $u(n)$、单位采样脉冲序列 $\delta(n)$ 的关系如式(1.1.14a)和式(1.1.14b)。

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \tag{1.1.14a}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \delta(n-k) \tag{1.1.14b}$$

任意序列 $x(n)$ 可表示为：

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{1.1.15}$$

式(1.1.15)中加权系数是序列各序号点的函数值 $x(m)$。其中

$$\delta(n-m) = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{1.1.16}$$

(2) 翻转：

$$y(n) = x(-n) \tag{1.1.17}$$

翻转序列 $y(n)$ 是将序列 $x(n)$ 以纵轴为对称线，左右翻转。

(3) 尺度变换：

尺度变换包括尺度压缩和尺度扩展两类。式(1.1.18)表示尺度压缩变换，式(1.1.19)表示尺度扩展变换，其中 m 为正整数。

$$y(n) = x(mn) \tag{1.1.18}$$

$$y(n)=\begin{cases}x\left(\dfrac{n}{m}\right), & \dfrac{n}{m}\text{ 为整数}\\ 0, & \dfrac{n}{m}\text{ 不是整数}\end{cases} \tag{1.1.19}$$

式(1.1.18)中，$y(n)$是对$x(n)$每隔m点取一点的所得；在尺度变换前后采样时间间隔相等的前提下，相当于时间轴(尺度)压缩成原来尺度的$\frac{1}{m}$。

式(1.1.19)中，$y(n)$是在$x(n)$的相邻样值序号之间均匀插入$m-1$个序号，且插入序号的序列值为零时的所得；在尺度变换前后采样时间间隔相等的前提下，相当于时间轴(尺度)扩展成原来尺度的m倍。

3）累加

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k) \tag{1.1.20}$$

$y(n_0)$等于在这一个n_0处的$x(n_0)$值与n_0以前所有$k<n_0$处的$x(k)$之和。

序列的能量ε：序列各采样值的平方和，如式(1.1.21)所示。

$$\varepsilon=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|x(k)|^2 \tag{1.1.21}$$

4）卷积和

序列$x(n)$与$h(n)$的卷积和$y(n)$是指两个序列的离散卷积，如式(1.1.22)所示。

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \tag{1.1.22}$$

卷积和的基本运算是翻转、延时、乘、加，具体步骤如下：

(1) 画出$x(m)$和$h(m)$；$h(m)$相对$m=0$的垂直轴反褶后，得$h(-m)$；

(2) $h(-m)$移位$|n|$个时间间隔，得$h(n-m)$，$n>0$时序列$h(-m)$右移，$n<0$时序列$h(-m)$左移；

(3) $x(m)$、$h(n-m)$序列对应m点的序列值分别相乘；

(4) 步骤(3)中的各m点相乘结果相加得到当前移位n时的卷积值$y(n)$；

(5) 改变移位n数值，重复步骤(2)～步骤(4)，得完整的序列线性卷积$y(n)$。

1.1.3　离散时间系统

1. 线性

设

$$y_1(n)=T[x_1(n)],\quad y_2(n)=T[x_2(n)]$$

当且仅当$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]=ay_1(n)+by_2$成立，系统是线性的。

2. 时不变性

设$T[x(n)]=y(n)$，当且仅当$T[x(n-k)]=y(n-k)$成立，系统是时不变的。

系统时不变性的物理意义是：输入序列先移位后变换的结果和先变换再移位的结果是一样的。

3. 系统输入输出关系

1）单位采样脉冲响应

线性时不变系统的输入为单位采样脉冲$\delta(n)$时，对应的输出称为系统的“单位采样脉

冲响应"$h(n)$。

当线性时不变系统输入任意序列 $x(n)$时，相应的输出 $y(n)$等于输入序列 $x(n)$和该系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$的卷积和，如式(1.1.23)所示。

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m) \tag{1.1.23}$$

2）结合 LTI 系统单位采样脉冲响应定义，线性卷积和的基本规律总结如下

（1）交换律：

$$h(n)*x(n)=x(n)*h(n) \tag{1.1.24}$$

（2）结合律：

$$\begin{aligned}[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)&=[x(n)*h_2(n)]*h_1(n)\\&=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

式(1.1.25)表明：若设 $h_1(n)$、$h_2(n)$是两个子系统的单位采样脉冲响应，$x(n)$是输入序列，则级联（串联）系统的变换结果与各级联子系统的次序无关。

级联（串联）系统总的单位采样脉冲响应等于各子系统单位采样脉冲响应的线性卷积。

（3）分配律：

$$y(n)=x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n) \tag{1.1.26}$$

式(1.1.26)表明：若设 $h_1(n)$、$h_2(n)$是两个子系统的单位采样脉冲响应，$x(n)$是输入序列，并联系统总的单位采样脉冲响应等于各并联子系统单位采样脉冲响应的和。

特别提示：

- 上述规律中给出的子系统及其串联、并联系统单位采样脉冲响应间的关系，仅对线性时不变系统成立。
- 因任意序列可用单位采样脉冲序列的移位加权和表示，如式(1.1.27a)所示，这也是卷积和的定义。可见序列与单位采样脉冲序列的卷积为序列本身，可理解为单位采样脉冲序列 $\delta(n)$对 $x(n)$的"采样"结果，如式(1.1.28)所示。

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{1.1.27a}$$

$$=x(n)*\delta(n) \tag{1.1.27b}$$

$$x(n-n_0)=x(n)*\delta(n-n_0) \tag{1.1.28}$$

4. 系统的因果性和稳定性

1）因果性

系统在加入输入序列后才有输出序列，称系统是因果的。线性时不变(LTI)系统具有因果性的充要条件为

$$h(n)=0,\quad n<0 \tag{1.1.29}$$

2）稳定性

若系统输入信号是有界的，则系统输出信号也是有界的，称系统是稳定的。LTI 系统稳定的充要条件是系统的单位采样脉冲响应绝对可和，如式(1.1.30)所示。

$$S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty \tag{1.1.30}$$

3）稳定的因果系统

稳定因果系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$既是单边的，又是有界的：

$$h(k)=0,\quad k<0$$

$$S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|<\infty$$

1.1.4　系统的线性常系数差分方程及其求解

1. 系统的线性常系数差分方程

1）系统的输入输出方程描述

LTI 系统的输出样值 $y(n)$可由当时的输入样值 $x(n)$、M 个过去的输入样值和 N 个过去的输出样值计算，如式(1.1.31)所示：

$$y(n)=\sum_{r=0}^{M}\frac{b_r}{a_0}x(n-r)-\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{a_0}y(n-k) \tag{1.1.31}$$

或写成式(1.1.32)：

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r) \tag{1.1.32}$$

2）方程(系统)的阶(次)

考虑 LTI 系统的输入输出方程，如式(1.1.31)或式(1.1.32)，设系统输出序列 $y(n)$的最高和最低序列号的差值为 N，输入序列 $x(n)$的最高和最低序列号的差值为 M，则系统的阶次为 $\max\{N,M\}$。

3）一些相关概念

(1) 常系数：差分方程中输入 $x(n)$、输出 $y(n)$及其各延迟项的系数都是常数。

(2) 线性性：差分方程中输入 $x(n)$、输出 $y(n)$及其各延迟项都是一次幂，且无相互相乘的项。

(3) 齐次性：将输入 $x(n)$、输出 $y(n)$及其各延迟项都移到方程左边，右边等于零。

(4) 方程解的唯一性：差分方程只有给定输入 $x(n)$和必要附加条件(初始条件，边界条件等)，解 $y(n)$才是唯一的。

(5) 因果稳定 LTI 系统的初始条件一般可表述为：$n<n_0$ 时，如果 $x(n)=0$，则 $n<n_0$ 时，$y(n)=0$。

2. 线性常系数差分方程的求解

(1) 经典法。分别写出差分方程的齐次解和特解形式，用初始条件求待定系数。

(2) 离散时间域法。

- 递推法：写出递推形式的系统时域 I/O 差分方程，求数值解(适合计算机求解)。
- 卷积和法：先求系统零状态解 $h(n)$，再求输入 $x(n)$时的输出，即

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

(3) 变换域法。把系统时域 I/O 差分方程经 z 变换，在 z 域求解输出的 z 变换函数 $Y(z)$；然后通过逆 z 变换，得到时域输出 $y(n)$。

1.1.5 模拟信号数字处理方法

1. 模拟信号数字处理

1）模拟信号的采样

（1）实际采样。实际采样输出信号 $x_p(t)$，可由输入的连续信号 $x_a(t)$ 与幅度为1，脉宽为 τ，周期为 T（单位为秒）的采样脉冲序列 $p_\tau(t)$ 相乘得到，如式(1.1.33)所示。

$$x_p(t)=x_a(t)p_\tau(t) \tag{1.1.33}$$

（2）理想采样。理想采样脉冲是脉宽 $\tau\to 0$，周期为 T，强度为1的冲激函数序列 $p_\delta(t)$，采样角频率 $\Omega_s=2\pi f_s=\dfrac{2\pi}{T}$（单位为 rad/s）。理想采样信号如式(1.1.34)所示。

$$\hat{x}(t)=x_a(t)p_\delta(t)=x_a(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT) \tag{1.1.34}$$

上述两种采样过程中相关信号时域波形如图1-7所示。

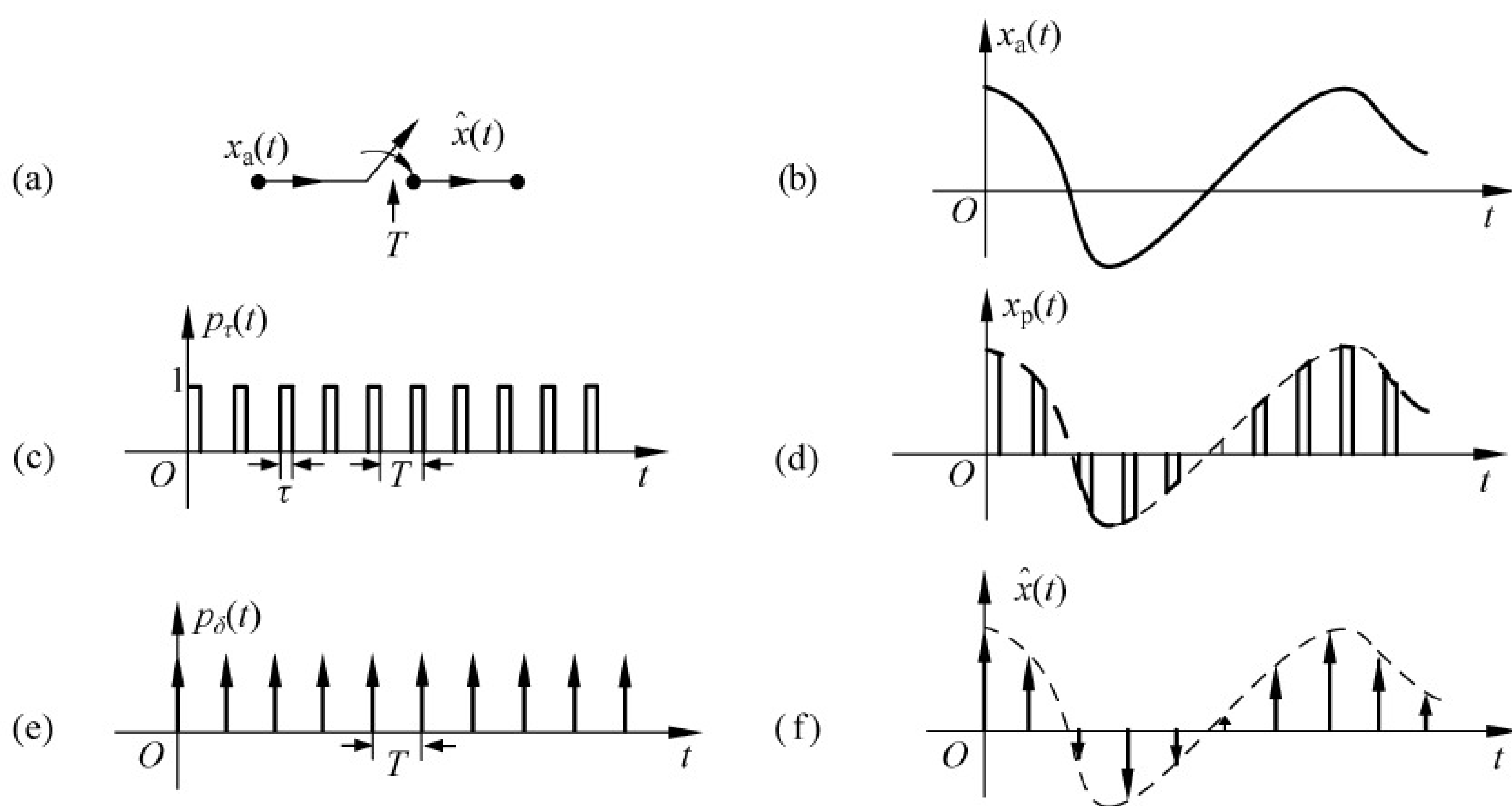


图1-7 模拟信号的采样

2）模拟信号采样的相关术语

（1）系统采样间隔（周期）：T，具有时间量纲，单位为 s（秒）。

系统采样频率（采样率）：$f_s=\dfrac{1}{T}$（单位为 Hz），或 $\Omega_s=2\pi f_s$，具有频率的量纲。

（2）奈奎斯特采样率（Nyquist rate）：采样定理允许的系统最小采样率 f_s。若模拟信号的最高频率为 f_h，则奈奎斯特采样率 $f_s=2f_h$。

（3）折叠频率 f_0（folding frequency）：系统实际采样率 f_s 的一半，即 $\dfrac{1}{2}f_s$。

（4）奈奎斯特间隔（Nyquist interval）：常用的有两种定义。

- 单边系统谱，系统的奈奎斯特间隔为 $\left[0,\dfrac{\Omega_s}{2}\right]$ 或 $\left[0,\dfrac{f_s}{2}\right]$，是实际处理信号的可能频率范围。
- 双边系统谱，系统的奈奎斯特间隔为 $\left[-\dfrac{\Omega_s}{2},\dfrac{\Omega_s}{2}\right]$ 或 $\left[-\dfrac{f_s}{2},\dfrac{f_s}{2}\right]$。

（5）量化编码误差：模拟采样数据 $\hat{x}(nT)$ 和量化编码的数字序列 $x(n)$ 之差。

3）采样定理

（1）采样定理应用的条件：

- 输入信号 $x_a(t)$是带限信号，上限频率为 Ω_h。采样前可用低通滤波器（LPF）预滤波来满足该条件。
- 采样频率（采样率）Ω_s（rad/s）要求：$\Omega_s \geqslant 2\Omega_h$。

（2）采样定理的结论。离散时间采样信号$\hat{x}_a(t)=x(n)$通过增益为 T，截止频率为$\frac{\Omega_s}{2}$的模拟 LPF，能完全恢复出原预滤波后的连续时间信号 $x_a(t)$。

（3）采样定理相关总结。

- 前置抗混叠低通滤波器的截止频率限定了被采样信号的最高频率。
- 设待采样信号 $x_a(t)$的频谱为 $X_a(\mathrm{j}\Omega)$，采样信号$\hat{x}_a(t)$的频谱为$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)$，理想采样系统模型 $p_\delta(t)$的频谱为 $P_\delta(\mathrm{j}\Omega)$，实际采样系统模型的 $p_\tau(t)$的频谱为 $P_\tau(\mathrm{j}\Omega)$。

① 理想采样信号的频谱：

$$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{2\pi}X_a(\mathrm{j}\Omega)*P_\delta(\mathrm{j}\Omega)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(\mathrm{j}\Omega-\mathrm{j}k\Omega_s)\tag{1.1.35}$$

式(1.1.35)表明：频谱$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)$是 $X_a(\mathrm{j}\Omega)$以采样角频率 Ω_s为周期的周期延拓，频谱的幅度受$\frac{1}{T}$加权，如图 1-8 所示。

② 理想采样信号的频谱特征：

- 频谱可由采样点的值 $x_a(nT)$计算，如式(1.1.36)。式(1.1.36)也是离散时间傅里叶变换(DTFT)的定义。

$$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega nT}\tag{1.1.36}$$

- 频谱是周期函数，周期为 $\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$。
- 逆 DTFT 的一种定义，如式(1.1.37)：

$$x_a(nT)=\frac{1}{\Omega_s}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2}\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega nT}\mathrm{d}\Omega\tag{1.1.37}$$

- 用计算机计算采样信号的频谱，得到的是其近似谱。

③ 混叠效应。设待采样带限连续信号的最高频率为 f_h，当系统实际采样频率 $f_s<2f_h$时，采样信号的频谱由该带限连续信号的频谱 $X_a(\mathrm{j}\Omega)$周期延拓得到时，各次调制频谱会部分重叠，如图 1-8(d)所示。

④ 实际采样信号的频谱。实际脉宽非零的采样信号 $x_p(t)$的频谱$\hat{X}_p(\mathrm{j}\Omega)$仍可以看成是原带限信号的频谱 $X_a(\mathrm{j}\Omega)$以采样角频率 Ω_s为周期的周期延拓结果。但各周期延拓的频谱，幅度包络按$\left|\frac{\sin(k\pi\tau/T)}{k\pi\tau/T}\right|$的规律，随频率升高而下降，如图 1-9(f)所示。

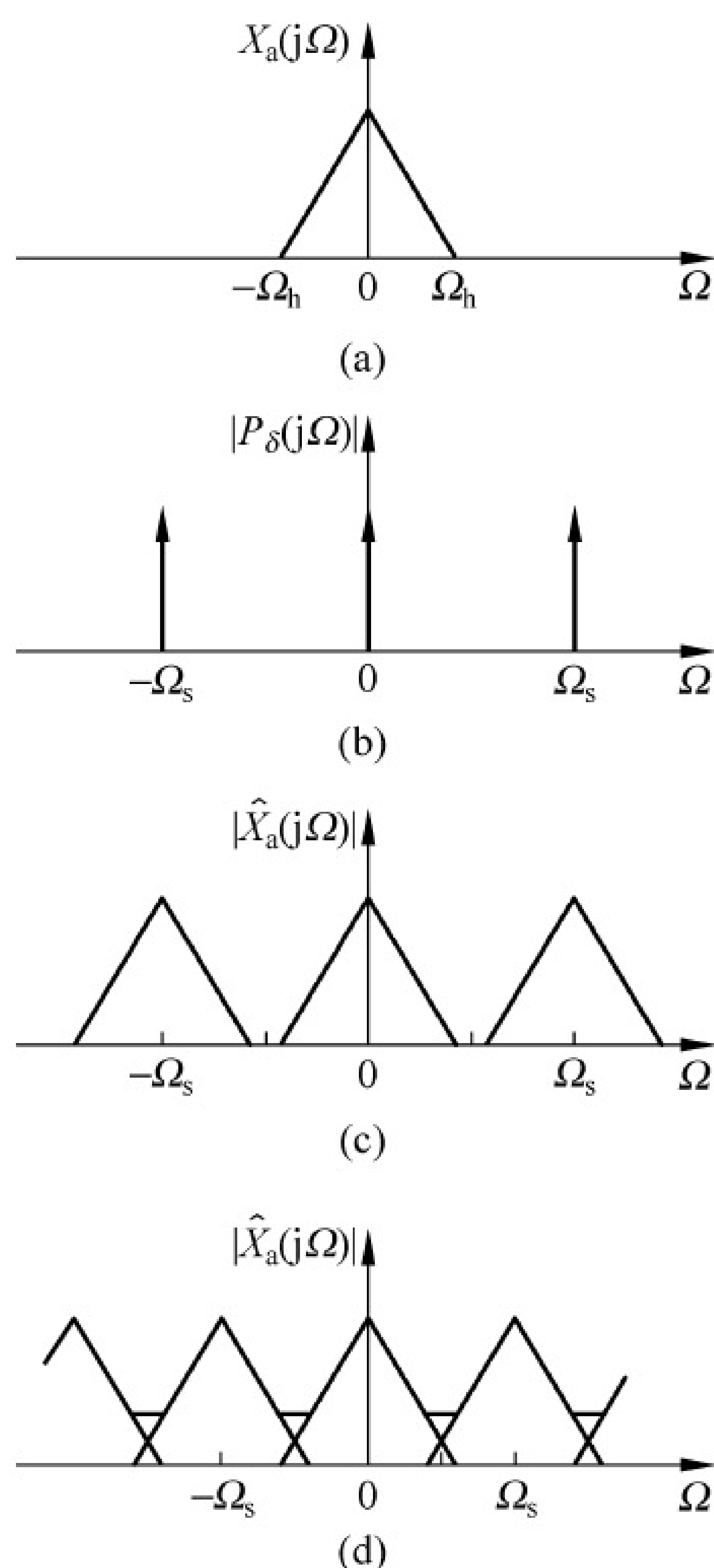


图 1-8　理想采样信号的频谱

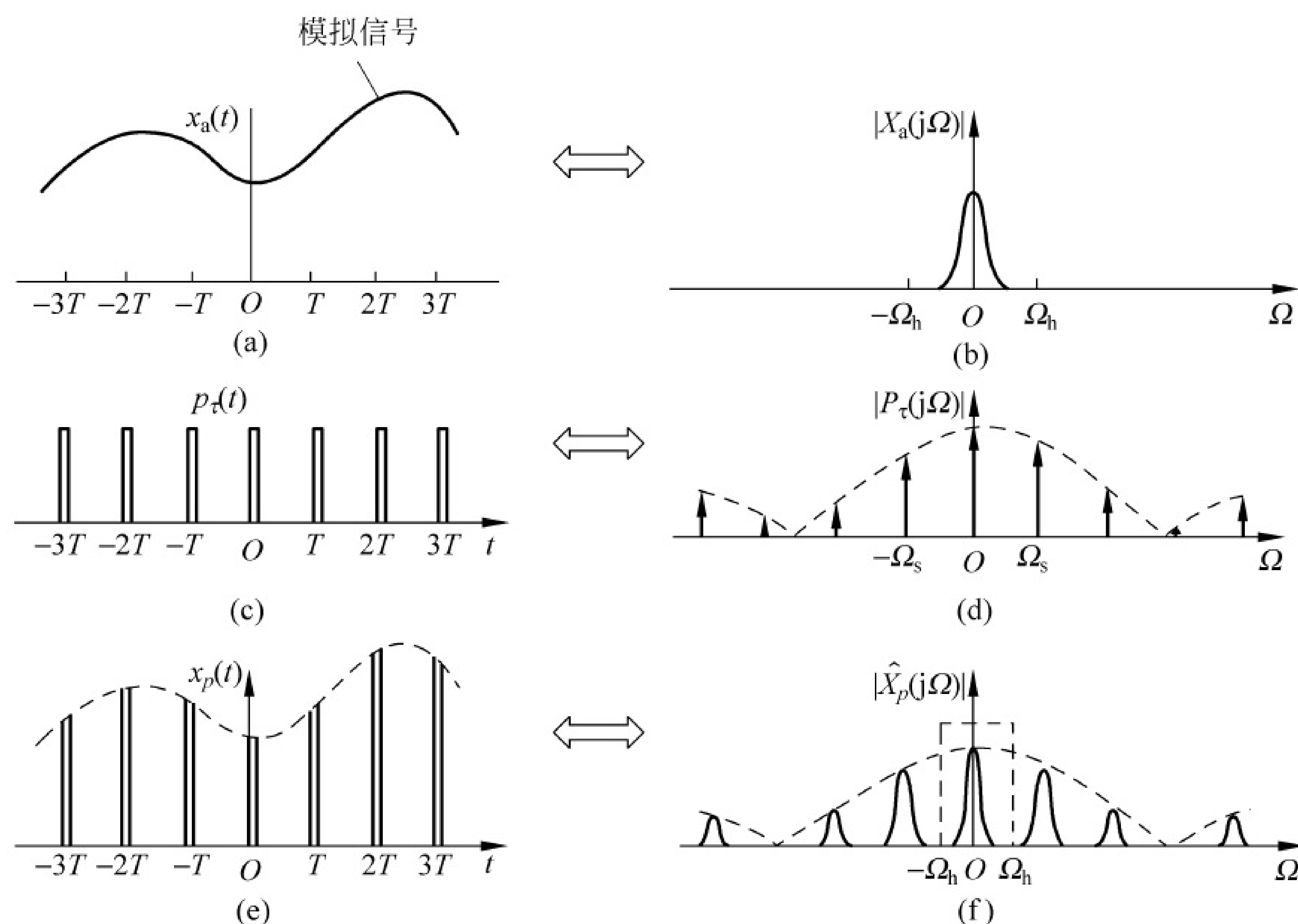


图 1-9　实际采样信号的频谱

2．数字信号转化成模拟信号

数字/模拟转换(D/AC)的典型流程如图 1-10 所示。

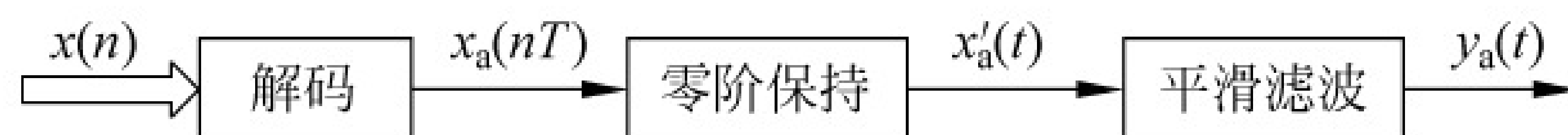


图 1-10　D/AC 方框图

1）频域分析

图 1-11(a)示意采样信号$\hat{x}_a(t)$经过一个频响为$G(j\Omega)$的理想低通滤波器(LPF)后，输出模拟信号 $y_a(t)$。若理想采样满足奈奎斯特定理，则采样信号$\hat{x}_a(t)$经过此理想 LPF 后，输出信号 $y_a(t)$只包含“基带频谱”，即原模拟带限信号 $x_a(t)$的频谱；从而 $y_a(t)$即是恢复出的原模拟带限信号。图 1-11中(b)、(c)、(d)所示均为相应信号或系统频响的幅度谱。

2）时域分析

图 1-11(a)中理想 LPF 的输出信号 $y_a(t)$，可由输入信号$\hat{x}_a(t)$和 LPF 的单位冲激响应 $g(t)$卷积而得。

因为 $\hat{x}_a(t)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT)$，$x_a(t)$ 是原被采样的带限模拟信号。

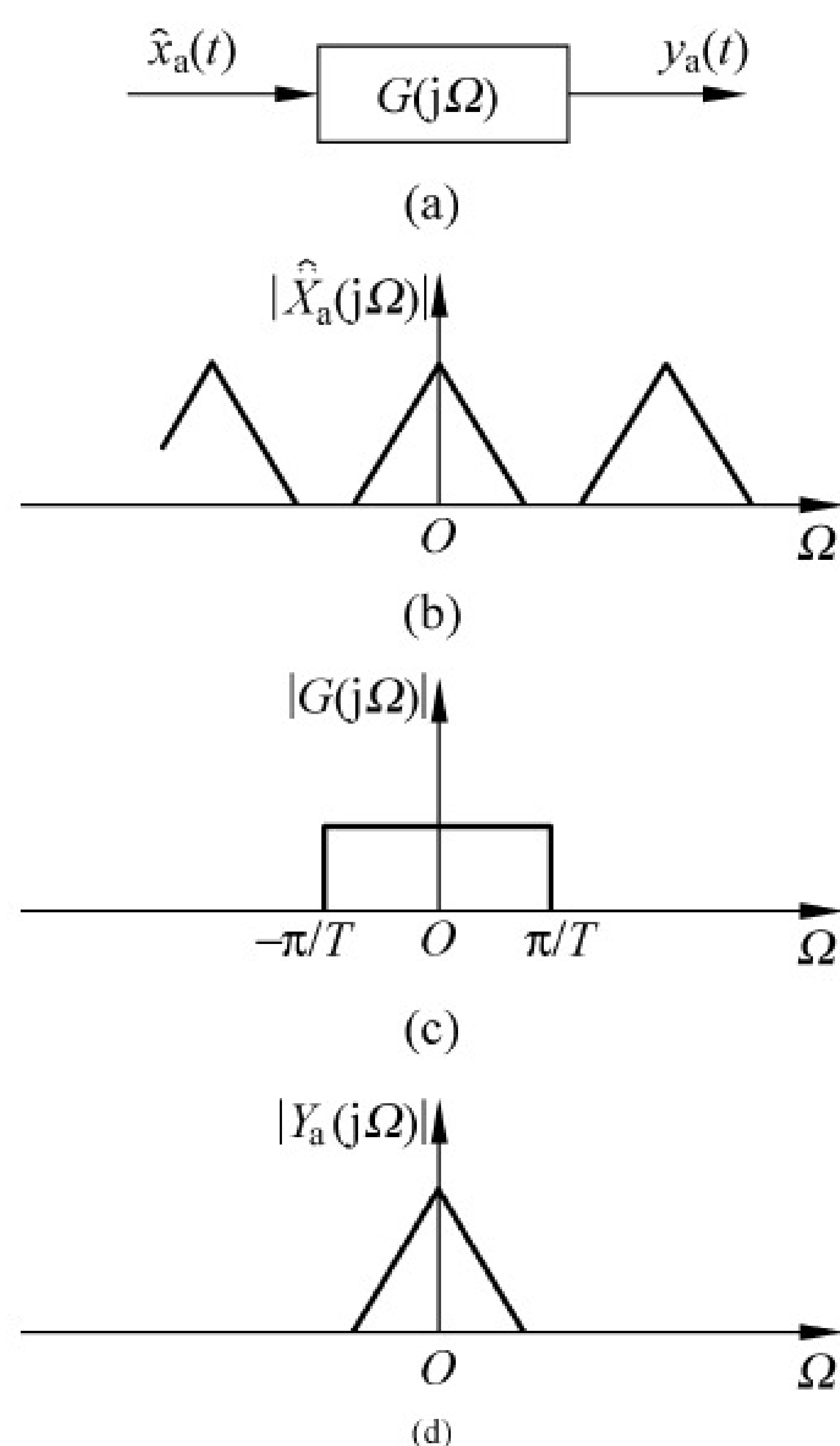


图 1-11　由理想采样信号恢复连续时间信号

$$g(t)=\frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}$$

所以

$$\begin{aligned}y_a(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)g(t-nT)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\frac{\sin\pi(t-nT)/T}{\pi(t-nT)/T}\\&\equiv x_a(t)\end{aligned}\tag{1.1.38}$$

其中 $g(t-nT)$ 为理想时域内插函数，波形如图 1-12 所示，其作用是在采样点 $x_a(nT)$ 之间，内插相应数值，从而恢复出原连续时间带限信号 $x_a(t)$。

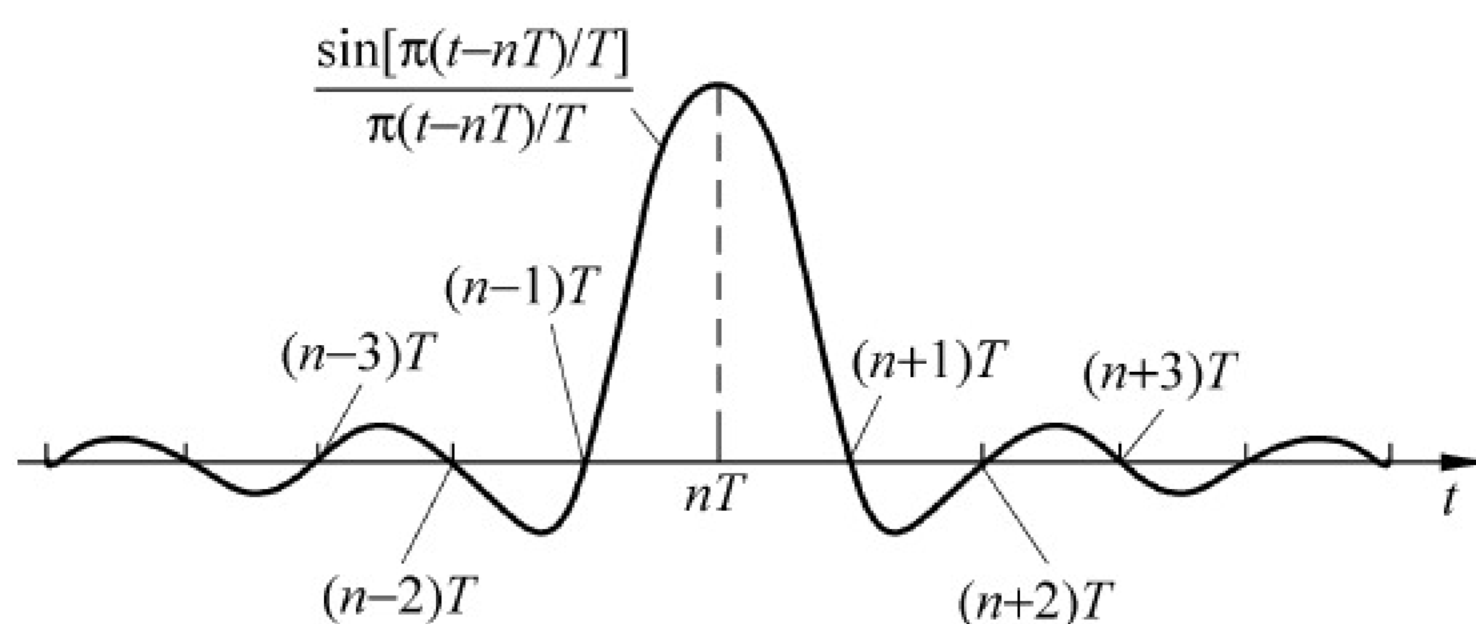


图 1-12 理想时域内插函数

3）常用内插器

（1）理想低通内插器。

（2）零阶保持器。

（3）一阶线性内插器。

1.2 习题解答

1-1 给定信号

$$x(n)=\begin{cases}2n+10, & -4\leqslant n\leqslant -1\\ 6, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）画出 $x(n)$ 的图形，标上各点的信号值。

（2）试用 $\delta(n)$ 及其相应的延迟表示 $x(n)$。

（3）令 $y(n)=3x(n+2)$，试画出 $y(n)$ 的图形。

解：

（1）$x(n)$ 的图形及各点的信号值如图 1-13 所示。

（2）由图 1-13 可直接写出

$$\begin{aligned}x(n)=&2\delta(n+4)+4\delta(n+3)+6\delta(n+2)+8\delta(n+1)+6\delta(n)+\\&6\delta(n-1)+6\delta(n-2)+6\delta(n-3)+6\delta(n-4)\end{aligned}$$

（3）先把 $x(n)$左移两个单位得 $x(n+2)$，再拉伸 3 倍即得所求 $y(n)$，如图 1-14 所示。

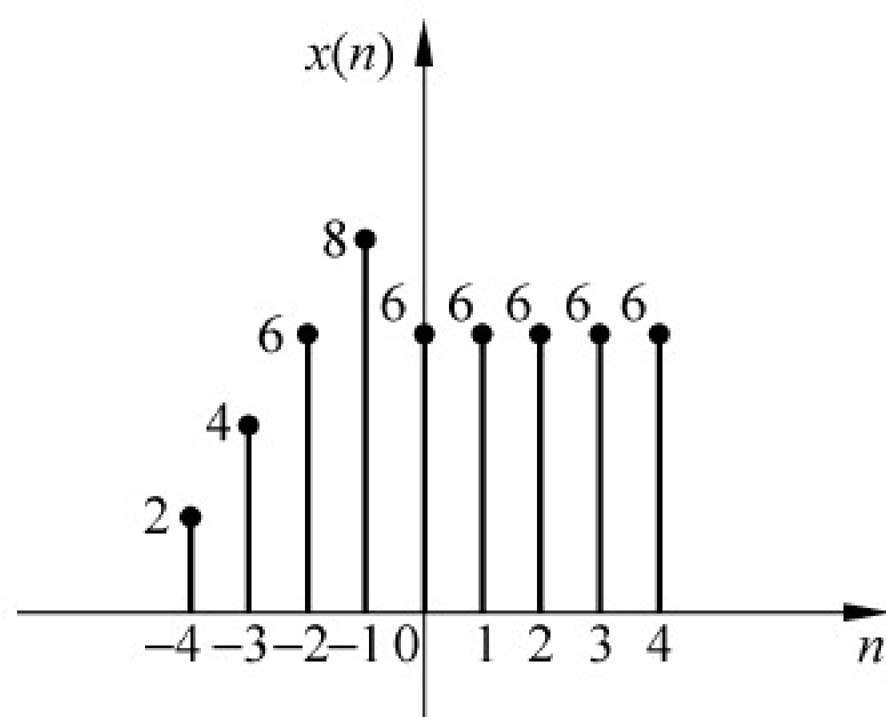


图 1-13　题 1-1 解图（一）

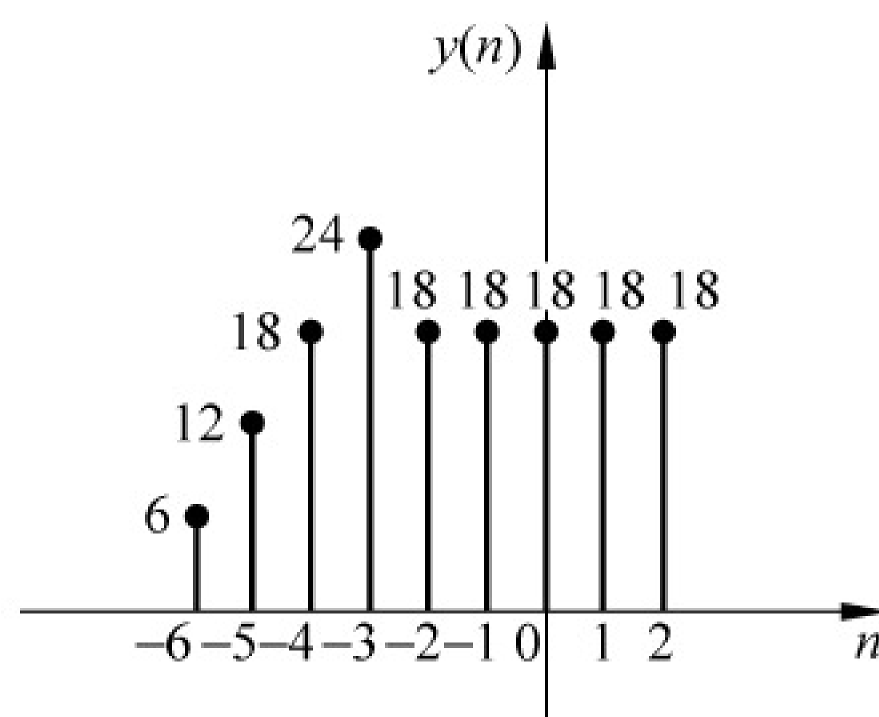


图 1-14　题 1-1 解图（二）

1-2　已知 $x_1(n)=\delta(n)+3\delta(n-1)+2\delta(n-2)$，$x_2(n)=u(n)-u(n-3)$。试求信号 $x(n)=x_1(n)*x_2(n)$，并画出 $x(n)$的图形。

解：序列的卷积计算过程应包括序列的反转、移位、相乘、求和 4 个过程。下面用图形法进行解答。

$x_1(k)$和 $x_2(k)$的图形如图 1-15 和图 1-16 所示。

第一步：将序列 $x_2(k)$反转，得到 $x_2(-k)$，如图 1-17 示。

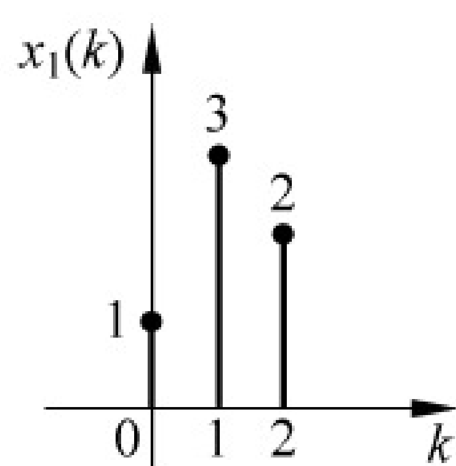


图 1-15　题 1-2 解图（一）

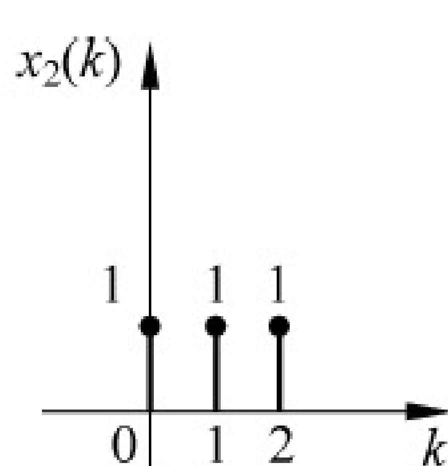


图 1-16　题 1-2 解图（二）

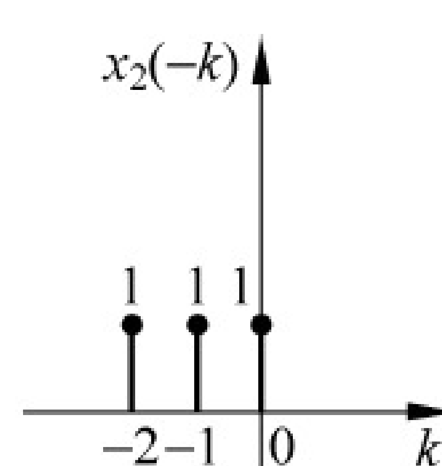


图 1-17　题 1-2 解图（三）

第二步：将 $x_2(-k)$右移 n 个单位，得到 $x_2(n-k)$，如图 1-18 所示。

第三步：将对应 k 的序列值相乘，得到 $x_1(k)\cdot x_2(n-k)$。

第四步：将第三步所有的乘积值相加，得到 $x(n)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}x_1(k)\cdot x_2(n-k)$。

第五步：改变 n 的数值，重复第二步～第四步，得到最后结果，如图 1-19 所示，即

$$x(n)=\delta(n)+4\delta(n-1)+6\delta(n-2)+5\delta(n-3)+2\delta(n-4)$$

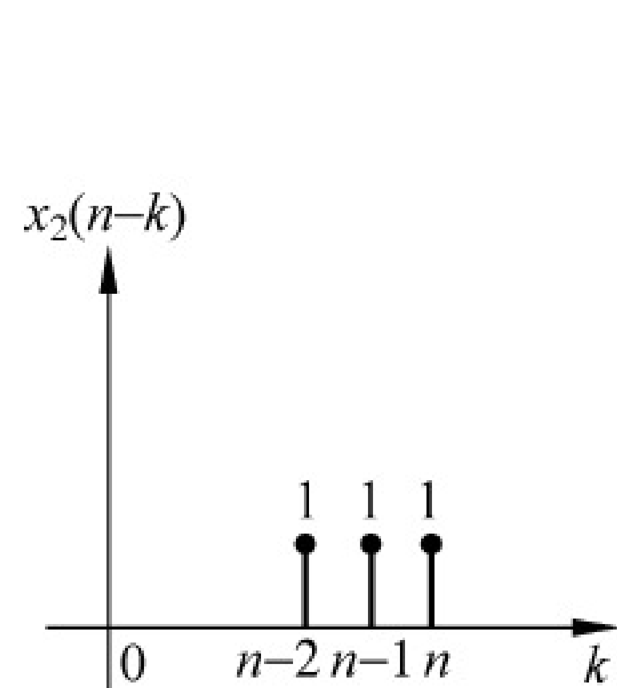


图 1-18　题 1-2 解图（四）

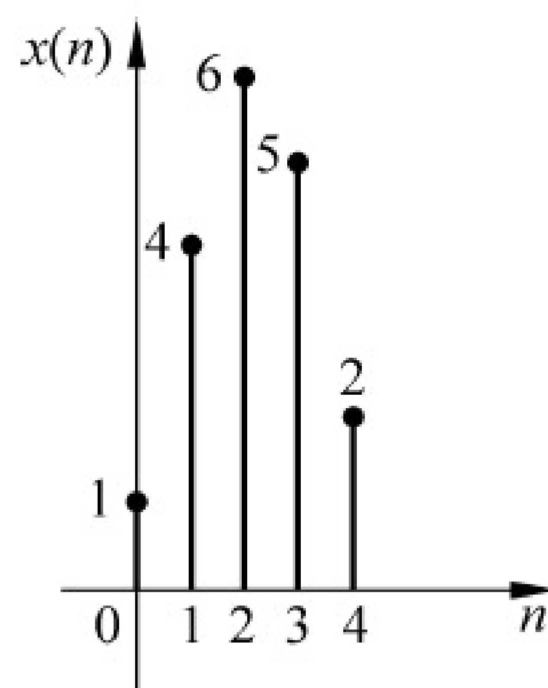


图 1-19　题 1-2 解图（五）

1-3 直接计算下面两个序列的卷积和 $y(n)=x(n)*h(n)$。

$$h(n)=\begin{cases}\alpha^n, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$x(n)=\begin{cases}\beta^{n-n_0}, & n_0\leqslant n\\ 0, & n<n_0\end{cases}$$

请用公式表示。

解：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

(1) 当 $n<n_0$ 时，$y(n)=0$。

(2) 当 $n_0\leqslant n\leqslant n_0+N-1$ 时，两序列部分重叠，因而：

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{m=n_0}^{n}x(m)h(n-m)\\&=\sum_{m=n_0}^{n}\beta^{m-n_0}\alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{m=n_0}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m\\&=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n_0}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\frac{\alpha^{n+1-n_0}-\beta^{n+1-n_0}}{\alpha-\beta},\quad \alpha\neq\beta\end{aligned}$$

$$y(n)=\alpha^{n-n_0}(n+1-n_0),\quad \alpha=\beta$$

(3) 当 $n>n_0+N-1$ 时，两序列全重叠，因而：

$$\begin{aligned}y(n)&=\sum_{m=n-N+1}^{n}x(m)h(n-m)\\&=\sum_{m=n-N+1}^{n}\beta^{m-n_0}\alpha^{n-m}=\frac{\alpha^n}{\beta^{n_0}}\sum_{m=n-N+1}^{n}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m\\&=\alpha^n\beta^{-n_0}\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-N+1}-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1-\frac{\beta}{\alpha}}\\&=\beta^{n+1-N-n_0}\frac{\alpha^N-\beta^N}{\alpha-\beta},\quad \alpha\neq\beta\end{aligned}$$

$$y(n)=N\alpha^{n-n_0},\quad \alpha=\beta$$

1-4 已知线性时不变系统的输入为 $x(n)$，系统的单位采样脉冲响应为 $h(n)$，试求系统的输出响应 $y(n)$。

(1) $x(n)=\delta(n)$， $h(n)=R_5(n)$；

(2) $x(n)=R_3(n)$， $h(n)=R_4(n)$；

(3) $x(n)=\delta(n-2)$， $h(n)=0.5^nR_3(n)$；

(4) $x(n)=2^nu(-n-1)$， $h(n)=0.5^nu(n)$。

解：

(1) $y(n)=x(n)*h(n)=R_5(n)$；

(2) $y(n)=x(n)*h(n)=\{1,2,3,3,2,1\}$；

(3) $y(n)=x(n)*h(n)=0.5^{n-2}R_3(n-2)$；

(4) $$y(n)=x(n)*h(n)=\begin{cases}\sum\limits_{m=-\infty}^{-1}0.5^{n-m}2^m=\dfrac{1}{3}\times 2^{-n}, & n\geqslant 0\\ \sum\limits_{m=-\infty}^{n}0.5^{n-m}2^m=\dfrac{4}{3}\times 2^{n}, & n\leqslant -1\end{cases}$$。

1-5 已知线性时不变系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 为

$$h(n)=a^{-n}u(-n),\quad 0<a<1$$

计算该系统的单位阶跃响应。

解：用 $s(n)$ 表示系统的单位阶跃响应，则

$$\begin{aligned}s(n)=u(n)*h(n)&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}h(m)u(n-m)\\&=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a^{-m}u(-m)u(n-m),\quad 0<a<1\end{aligned}$$

(1) 当 $n\leqslant 0$ 时

$$u(-m)u(n-m)=\begin{cases}1, & -\infty\leqslant m\leqslant n\\0, & m>n\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}s(n)&=\sum_{m=-\infty}^{n}a^{-m}=\sum_{m=-n}^{\infty}a^{m}=\sum_{m=-n}^{0}a^{m}+\sum_{m=0}^{+\infty}a^{m}-1\\&=\frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}+\frac{1}{1-a}-1\\&=\frac{a-a^{-n}}{a-1}+\frac{a}{1-a}\\&=\frac{a^{-n}}{1-a}\end{aligned}$$

(2) 当 $n>0$ 时

$$u(-m)u(n-m)=\begin{cases}1, & -\infty\leqslant m\leqslant 0\\0, & m>0\end{cases}$$

所以

$$s(n)=\sum_{m=-\infty}^{0}a^{-m}=\sum_{m=0}^{+\infty}a^{m}=\frac{1}{1-a}$$

最终得

$$s(n)=\frac{1}{1-a}[a^{-n}u(-n)+u(n-1)]$$

1-6 判断下面序列是否是周期的，若是周期的，确定其周期。

(1) $x(n)=A\cos\left(\dfrac{3}{7}\pi n-\dfrac{\pi}{8}\right)$，$A$ 是常数；

(2) $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\frac{1}{8}n-\pi\right)}$。

解：

(1) $\omega=\frac{3}{7}\pi, \frac{2\pi}{\omega}=\frac{14}{3}$，为有理数，所以是周期序列，周期为 $N=14$；

(2) $\omega=\frac{1}{8}, \frac{2\pi}{\omega}=16\pi$，为无理数，所以是非周期序列。

1-7　设系统分别用下面的差分方程描述，其中 $x(n)$，$y(n)$ 分别表示系统的输入和输出，判断系统是否是线性时不变的？

(1) $y(n)=x(n)+2x(n-1)+3x(n-2)$；

(2) $y(n)=3x(n)+4$；

(3) $y(n)=x(n-n_0)$，n_0 为整常数；

(4) $y(n)=x(-n)$；

(5) $y(n)=x^2(n)+1$；

(6) $y(n)=x(n^2)$；

(7) $y(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m)$；

(8) $y(n)=x(n)\sin(\omega n)$。

解：

(1) 输入为 $x(n-n_0)$，输出为

$$y'(n)=x(n-n_0)+2x(n-n_0-1)+3x(n-n_0-2)$$

$$y(n-n_0)=x(n-n_0)+2x(n-n_0-1)+3x(n-n_0-2)=y'(n)$$

所以该系统为时不变系统。

令

$$y(n)=T[x(n)]$$

则

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n)+bx_2(n)+2(ax_1(n-1)+bx_2(n-1))+3(ax_1(n-2)+bx_2(n-2))$$

$$T[x_1(n)]=x_1(n)+2x_1(n-1)+3x_1(n-2)$$

$$T[x_2(n)]=x_2(n)+2x_2(n-1)+3x_2(n-2)$$

显然

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统是线性系统。

(2) 输入为 $x(n-n_0)$，输出为 $y'(n)=3x(n-n_0)+4$，而

$$y(n-n_0)=3x(n-n_0)+4=y'(n)$$

所以该系统为时不变系统。

进一步，有

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=3ax_1(n)+3bx_2(n)+4$$

而

$$T[x_1(n)]=3x_1(n)+4,\quad T[x_2(n)]=3x_2(n)+4$$

显然，有

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统为非线性系统。

(3) 输入为 $x(n-n_1)$，输出为 $y'(n)=x(n-n_1-n_0)$，而

$$y(n-n_1)=x(n-n_1-n_0)=y'(n)$$

所以该系统为时不变系统。又有

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n-n_0)+bx_2(n-n_0)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统为线性系统。

(4) 时变性：

① 考虑信号先延迟，再变换。$x(n)$延时 D 个单位，得

$$x_D(n)=x(n-D)$$

再变换（反褶），得

$$y_D(n)=x_D(-n)=x(-n-D)$$

② 若信号先变换，再延迟。变换，得

$$y(n)=x(-n)$$

$y(n)$延时 D 个单位，得

$$y(n-D)=x(-(n-D))=x(-n+D)$$

显然 $y(n-D)\neq y_D(n)$，所以该系统为时变系统。

线性性：

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(-n)+bx_2(-n)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统为线性系统。

(5) 输入为 $x(n-n_0)$，输出为 $y'(n)=x^2(n-n_0)+1$，而

$$y(n-n_0)=x^2(n-n_0)+1=y'(n)$$

所以该系统为时不变系统。因为

$$T[x_1(n)]=x_1^2(n)+1,\quad T[x_2(n)]=x_2^2(n)+1$$

显然

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=(ax_1(n)+bx_2(n))^2+1\neq aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统为非线性系统。

(6) 时变性：

① 考虑信号先延迟，再变换：

$x(n)$延时 D 个单位，得

$$x_D(n)=x(n-D)$$

再变换（非线性抽取），得

$$y_D(n)=x_D(n^2)=x(n^2-D)$$

② 若信号先变换，再延迟：

变换（非线性抽取），得

$$y(n)=x(n^2)$$

$y(n)$延时 D 个单位，得

$$y(n-D)=x((n-D)^2)$$

显然 $y(n-D)\neq y_D(n)$，所以该系统为时变系统。考虑到所给系统是对 $x(n)$的非线性抽取，显然抽取的起始时间不同，抽取的结果也不同，所以是时变的。

线性性：

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ax_1(n^2)+bx_2(n^2)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统为线性系统。

(7) 输入为 $x(n-n_0)$，输出为 $y'(n)=\sum_{m=0}^{n}x(m-n_0)$，而

$$y(n-n_0)=\sum_{m=0}^{n-n_0}x(m)\neq y'(n)$$

所以该系统为时变系统。

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=\sum_{m=0}^{n}(ax_1(m)+bx_2(m))=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统为线性系统。

(8) 时变性：

① 考虑信号先延迟，再变换：

$x(n)$延时 D 个单位，得

$$x_D(n)=x(n-D)$$

再变换(载波调制)，得

$$y_D(n)=x_D(n)\sin(\omega n)=x(n-D)\sin(\omega n)$$

② 若信号先变换，再延迟：

变换(载波调制)，得

$$y(n)=x(n)\sin(\omega n)$$

$y(n)$延时 D 个单位，得

$$y(n-D)=x(n-D)\sin(\omega(n-D))$$

显然 $y(n-D)\neq y_D(n)$，所以该系统为时变系统。

线性性：

$$T[x_1(n)]=x_1(n)\sin(\omega n),\quad T[x_2(n)]=x_2(n)\sin(\omega n)$$

而

$$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin(\omega n)=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$$

所以该系统为线性系统。

1-8　给定下述系统的时域输入输出差分方程，试判定系统是否是因果、稳定系统并说明理由。

(1) $y(n)=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}x(n-k)$；

(2) $y(n)=x(n)+x(n+1)$；

(3) $y(n)=\sum_{k=n-n_0}^{n+n_0}x(k)$；

(4) $y(n)=x(n-n_0)$；

(5) $y(n)=e^{x(n)}$。

解：

(1) 只要 $N\geqslant 1$，该系统就是因果系统，因为输出只与 n 时刻和 n 时刻以前的输入有关。如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|\leqslant M$，因此该系统是稳定系统。

(2) 该系统是非因果系统，因为 n 时刻的输出还与 n 时刻以后的输入有关。如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|\leqslant |x(n)|+|x(n+1)|\leqslant 2M$，因此该系统是稳定系统。

(3) 如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|\leqslant \sum\limits_{k=n-n_0}^{n+n_0} x(k)\leqslant |2n_0+1|M$，因此系统是稳定的。系统是非因果系统，因为输出还与 $x(n)$ 将来的值有关。

(4) 当 $n_0<0$ 时，系统是非因果系统，因为 n 时刻输出与 n 时刻以后的输入有关。当 $n_0\geqslant 0$ 时，系统是因果系统。如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|\leqslant M$，因此系统是稳定的。

(5) 系统是因果系统，因为系统的输出不取决于 $x(n)$ 未来的值。如果 $|x(n)|\leqslant M$，则 $|y(n)|=|e^{x(n)}|\leqslant e^{|x(n)|}\leqslant e^M$，因此系统是稳定的。

1-9 设线性时不变系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 和输入序列 $x(n)$ 如图 1-20 所示，要求画出系统输出 $y(n)$ 的波形。

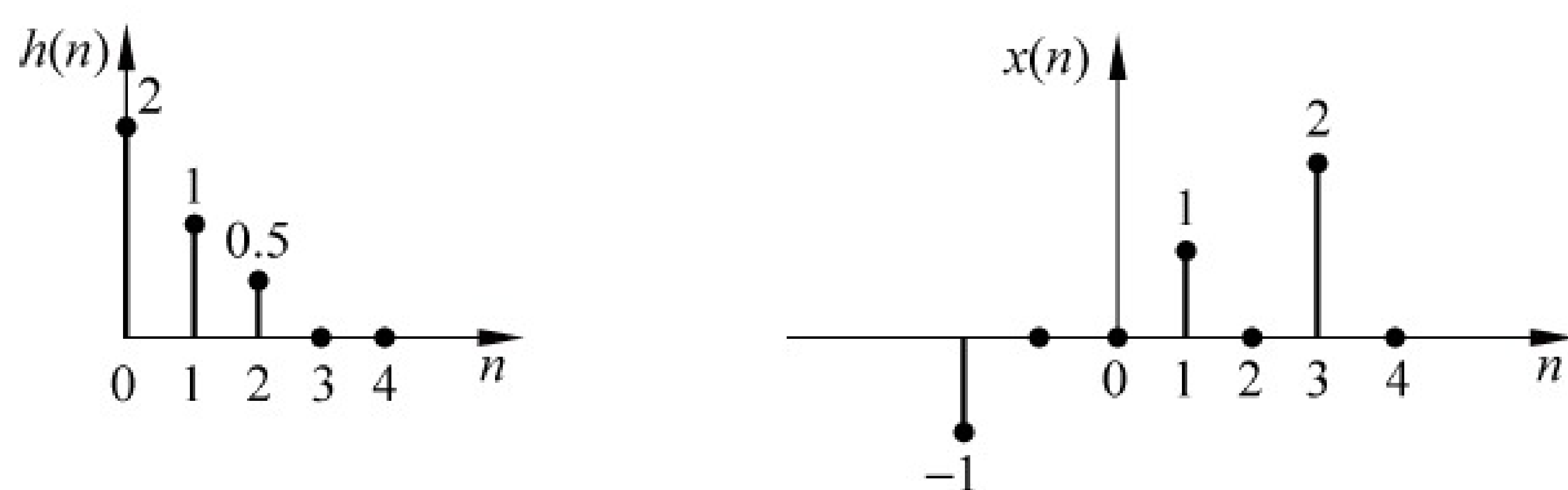


图 1-20 题 1-9 图

解：

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

$$=-2\delta(n+2)-\delta(n+1)-0.5\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)+4.5\delta(n-3)+2\delta(n-4)+\delta(n-5)$$

$y(n)$ 的输出波形如图 1-21 所示。

1-10 列出如图 1-22 所示系统时域 I/O 差分方程，并按初始条件 $y(n)=0, n<0$，求输入为 $x(n)=u(n)$ 时的系统输出序列 $y(n)$。

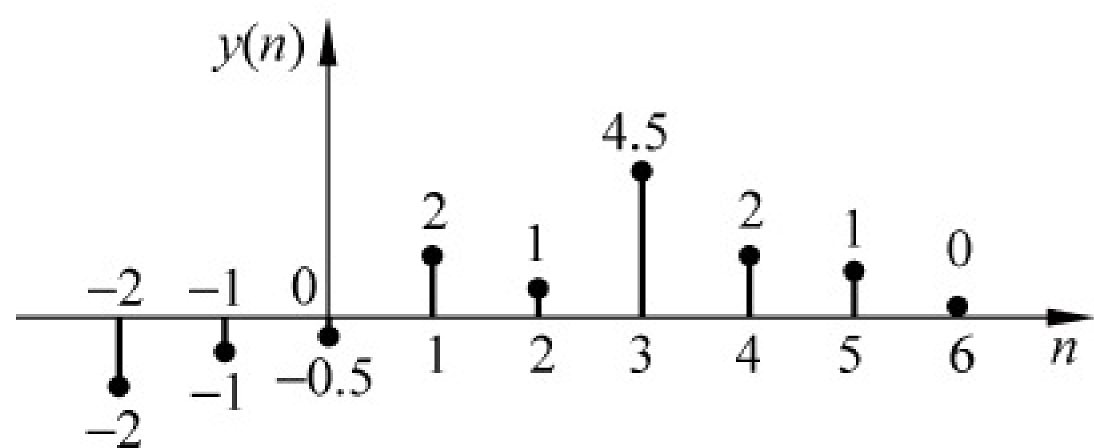


图 1-21 题 1-9 解图

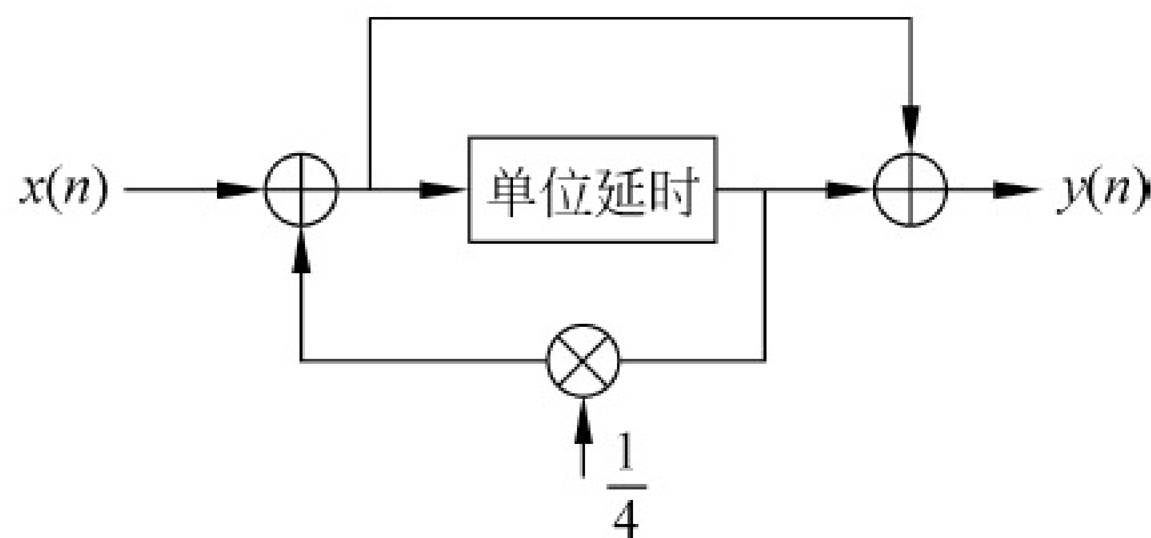


图 1-22 题 1-10 图

解：列输入输出差分方程。

方法 1：在时域直接列写输入输出差分方程。

设图 1-22 输入端加法器输出为 $w(n)$，依据系统结构有

$$w(n) = x(n) + \frac{1}{4}w(n-1) \qquad ①$$

$$y(n) = w(n) + w(n-1) \qquad ②$$

将①代入②，得

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{4}w(n-1) + w(n-1) = x(n) + \frac{1}{4} \cdot 5w(n-1) \qquad ③$$

由①和②，得

$$y(n) - 4w(n) = w(n) - 4x(n)$$

$$y(n) = -4x(n) + 5w(n) \qquad ④$$

由④可得

$$y(n-1) = -4x(n-1) + 5w(n-1)$$

$$5w(n-1) = y(n-1) + 4x(n-1) \qquad ⑤$$

将⑤代入③，得

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{4}[\,y(n-1) + 4x(n-1)]$$

整理得系统时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + x(n) + 4x(n-1) \qquad ⑥$$

方法 2：在学习 z 变换以后，可以对式①、式②两边做 z 变换。在变换域（z 域）得到系统的 I/O z 变换关系

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \qquad ⑦$$

再由⑦进行逆 z 变换，可得所给系统的时域 I/O 差分方程

$$y(n) = \frac{1}{4}y(n-1) + x(n) + x(n-1)$$

结果与方法 1 一致。

根据写出的系统时域 I/O 差分方程，用递推法，求输入为 $x(n)=u(n)$时的系统输出序列 $y(n)$。

$$y(0) = \frac{1}{4}y(-1) + x(0) + x(-1) = 1$$

$$y(1) = \frac{1}{4}y(0) + x(1) + x(0) = 2 + \frac{1}{4}$$

$$y(2) = \frac{1}{4}y(1) + x(2) + x(1) = 2\left(1+\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$y(3) = \frac{1}{4}y(2) + x(3) + x(2) = 2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\vdots$$

即

$$\begin{aligned} y(n) &= \frac{1}{4}y(n-1)+x(n)+x(n-1) \\ &= 2\times\left[1+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]+\left(\frac{1}{4}\right)^{n} \\ &= \left[\frac{8}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u(n) \end{aligned}$$

1-11 设有一系统，输入输出关系由以下时域差分方程确定：

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

设系统是因果性的。

（1）求该系统的单位采样脉冲响应；

（2）由（1）的结果，利用卷积和求输入 $x(n)=e^{j\omega n}u(n)$时的响应。

解：

（1）系统单位采样脉冲响应，是输入 $x(n)=\delta(n)$时，系统的输出，记为 $h(n)$。因为

$$y(n)=h(n)=0,\quad n<0$$

所以

$$h(0)=y(0)=\frac{1}{2}y(-1)+x(0)+\frac{1}{2}x(-1)=1$$

$$h(1)=y(1)=\frac{1}{2}y(0)+x(1)+\frac{1}{2}x(0)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$h(2)=y(2)=\frac{1}{2}y(1)+x(2)+\frac{1}{2}x(1)=\frac{1}{2}$$

$$h(3)=y(3)=\frac{1}{2}y(2)+x(3)+\frac{1}{2}x(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$

$$\vdots$$

可以推出

$$h(n)=y(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

即

$$h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)$$

（2）求解给定输入下的系统响应。

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n)*h(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\delta(n)\right]*e^{j\omega n}u(n) \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)\right]*e^{j\omega n}u(n)+e^{j\omega n}u(n) \\ &= \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{(m-1)}e^{j\omega(n-m)}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n) \\ &= 2e^{j\omega n}\frac{\frac{1}{2}e^{-j\omega}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\omega(n+1)}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n) \end{aligned}$$

$$=\frac{e^{j\omega(n-1)}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)$$

$$=\frac{e^{j\omega n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{e^{j\omega}-\frac{1}{2}}u(n-1)+e^{j\omega n}u(n)$$

第 2 章

CHAPTER 2

离散时间信号和系统的变换域分析

2.1 重点内容

2.1.1 概述

信号和系统的分析方法有时域分析方法和频域分析方法。离散时间信号和系统的频域分析是在傅里叶变换(含傅里叶级数)域或 z 变换域上进行的。这里的傅里叶变换指的是序列的傅里叶变换(DTFT),它和模拟域中的连续时间傅里叶变换(CTFT)相对应,都是线性变换,很多性质是类似的。z 变换是傅里叶变换的一种推广,单位圆上的 z 变换就是傅里叶变换。

本章学习序列的傅里叶变换和 z 变换,以及利用 z 变换分析离散时间系统和信号频域特性。

2.1.2 序列的离散时间傅里叶变换

1. 定义

离散时间傅里叶变换(DTFT)的定义如式(2.1.1)。

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \tag{2.1.1}$$

注意:

- 变换权函数的指数有"—"号,变换结果是数字频率 ω 的连续周期函数,周期为 2π。
- DTFT 中数字域频率 ω(单位为弧度,rad)和模拟域频率 f(单位为 Hz),通过采样频率 f_s 进行关联,如式(2.1.1a);与模拟域角频率 Ω(单位为 rad/s)的关系如式(2.1.2b)。

$$f = \omega \cdot \frac{f_s}{2\pi} \tag{2.1.2a}$$

$$\Omega = \omega \cdot f_s \tag{2.1.2b}$$

逆离散时间傅里叶变换(IDTFT)的定义如式(2.1.3)。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\, \mathrm{d}\omega \tag{2.1.3}$$

注意: IDTFT 变换权函数的指数无"—"号,变换结果是变量为 n 的离散序列。

2. 主要性质

DTFT 的主要性质见表 2-1。

表 2-1　DTFT 的主要性质

序　号	名　称	序　列	傅里叶变换
1	周期性	$x(n)$	$X(e^{j[\omega+2\pi]})=X(e^{j\omega})$
2	线性(叠加性)	$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$
3	时移	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$
4	频移	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
5	时域卷积定理	$y(n)=x(n)*h(n)$	$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$
6	频域卷积定理	$y(n)=x(n)h(n)$	$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*H(e^{j\omega})$
7	帕斯瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\|x(n)\|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|X(e^{j\omega})\|^2d\omega$	

表 2-1 中的频域卷积常称为“周期卷积运算”,定义如下:

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})H(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

3. 对称性

1) 共轭对称序列 $x_e(n)$

任意给定序列 $x_e(n)$,当且仅当式(2.1.4)成立时,称序列为“共轭对称序列”。

$$x_e(n)=x_e^*(-n) \tag{2.1.4}$$

设 $x_e(n)\equiv x_{er}(n)+jx_{ei}(n)$,则

$$x_{er}(n)=x_{er}(-n),\quad x_{er}(n)\text{是实偶序列}$$

$$x_{ei}(n)=-x_{ei}(-n),\quad x_{ei}(n)\text{是实奇序列}$$

2) 共轭反对称序列 $x_o(n)$

任意给定序列 $x_o(n)$,当且仅当式(2.1.5)成立时,称序列为“共轭反对称序列”。

$$x_o(n)=-x_o^*(-n) \tag{2.1.5}$$

设 $x_o(n)\equiv x_{or}(n)+jx_{oi}(n)$,则

$$x_{or}(n)=-x_{or}(-n),\quad x_{or}(n)\text{是实奇序列}$$

$$x_{oi}(n)=x_{oi}(-n),\quad x_{oi}(n)\text{是实偶序列}$$

3) 一般复序列 $x(n)$ 的分解

任意给定 $x(n)$,可以如式(2.1.6)分解表述。

$$x(n)\equiv x_r(n)+jx_i(n)\equiv x_e(n)+x_o(n) \tag{2.1.6}$$

其中,

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

4) 序列频谱的对称性

任意序列 $x(n)$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 均可分解为共轭对称和共轭反对称两部分之和,如

式(2.1.7)所示。

$$X(e^{j\omega}) \equiv X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega}) \tag{2.1.7}$$

其中

$X_e(e^{j\omega}) = X_e^*(e^{-j\omega})$，　称 $X_e(e^{j\omega})$ 为共轭对称频谱

$X_o(e^{j\omega}) = -X_o^*(e^{-j\omega})$，　称 $X_o(e^{j\omega})$ 为共轭反对称频谱

5）DTFT 的对称性

若复序列 $x(n)$分解为：$x(n) \equiv x_r(n) + jx_i(n)$，则可以证明：

$$\mathrm{FT}[x_r(n)] \equiv X_e(e^{j\omega}) \tag{2.1.8}$$

$$\mathrm{FT}[jx_i(n)] \equiv X_o(e^{j\omega}) \tag{2.1.9}$$

实部序列的谱是共轭对称的，纯虚序列的谱是共轭反对称的。

若复序列 $x(n)$分解为 $x(n) \equiv x_e(n) + x_o(n)$，则可以证明：

$$\mathrm{FT}[x_e(n)] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] \equiv X_R(\omega) \tag{2.1.10}$$

$$\mathrm{FT}[x_o(n)] = j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] \equiv jX_I(\omega) \tag{2.1.11}$$

$\mathrm{FT}[x(n)] \equiv X(e^{j\omega})$的实部，对应于序列 $x(n)$中共轭对称部分的 DTFT；$\mathrm{FT}[x(n)] \equiv X(e^{j\omega})$的虚部，对应于序列 $x(n)$中共轭反对称部分的 DTFT。

2.1.3 周期序列的离散傅里叶级数与 DTFT

1. 周期序列的离散傅里叶级数

设周期序列$\tilde{x}(n)$的周期为 N。显然$\tilde{x}(n)$不满足序列绝对可和条件，一般意义下的 FT 不存在。一般通过离散傅里叶级数(discrete Fourier series，DFS)描述其频谱特征。

DFS 定义如式(2.1.12)所示。

$$\tilde{X}(k) = \mathrm{DFS}[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{2.1.12}$$

其中，k 为任意整数。逆离散傅里叶级数(IDFS)定义如式(2.1.13)所示。

$$\tilde{x}(n) = \mathrm{IDFS}[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \tag{2.1.13}$$

其中，n 为任意整数。

2. 周期序列的 DTFT

在单位冲激函数意义下，周期序列的 DTFT 形式上可如式(2.1.14)所示。

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) = \mathrm{FT}[\tilde{x}(n)] &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\tilde{X}(k)}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi r\right) \\ &= \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{X}(k)\delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

特别提示：

- 周期序列的 DTFT、DFS 形状相同；
- 周期序列的 DTFT 幅度是其 DFS 幅度的$\frac{2\pi}{N}$倍，其中 N 为序列的周期；
- 周期序列的 DTFT 形式上是周期性的、移位单位冲激函数的加权和，周期为 2π；而其 DFS 是频域周期序列，周期为整数 N。

2.1.4 DTFT 和连续时间傅里叶变换之间的关系

设模拟信号 $x_a(t)$ 及其采样信号 $\hat{x}_a(t)$，对应的模拟信号傅里叶变换（continuous-time Fourier transform，CFT）分别记为 $X_a(j\Omega)$、$\hat{X}_a(j\Omega)$，则 $\hat{x}_a(t)$ 和 $x_a(t)$ 的关系如式(2.1.15)所示，$\hat{X}_a(j\Omega)$ 和 $X_a(j\Omega)$ 的关系如式(2.1.16)所示。

$$\hat{x}_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT)\delta(t-nT), \quad t\text{ 为实数} \tag{2.1.15}$$

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left[j\left(\Omega - m\frac{2\pi}{T}\right)\right] \tag{2.1.16}$$

式(2.1.16)表明，$\hat{X}_a(j\Omega)$ 是以采样模拟角频率 $\Omega_s=\frac{2\pi}{T}$ 为周期，将 $X_a(j\Omega)$ 进行周期延拓的结果。

设采样信号值对应的数字序列为 $x(n)=x_a(nT)$，则该序列的 DTFT 与 $\hat{X}_a(j\Omega)$、$X_a(j\Omega)$ 的关系如式(2.1.17)所示。

$$X(e^{j\omega}) = \hat{X}_a(j\Omega)\big|_{\Omega=\omega/T} = \frac{1}{T}\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a\left[j\left(\frac{\omega}{T} - m\frac{2\pi}{T}\right)\right] \tag{2.1.17}$$

式(2.1.17)表明，带限模拟信号的频谱 $X_a(j\Omega)$，经频率尺度变换后，在数字频率域以 2π 为周期进行周期延拓，就可得到采样值对应序列 $x(n)$ 的 DTFT。

2.1.5 *z* 变换

1. 定义

z 变换是离散时间信号或系统单位采样脉冲响应的复频域变换。

$$\text{双边 } z \text{ 变换} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.1.18a}$$

$$\text{单边 } z \text{ 变换} \quad X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n} \tag{2.1.18b}$$

$x(n)$ 的 z 变换的一般定义如式(2.1.18a)；若 $x(n)$ 是因果序列，则其 z 变换简化为式(2.1.18b)。

2. *z* 变换的收敛域(ROC)

- 因果、非因果混合序列(双边序列) z 变换的 ROC：z 平面上的某个圆环内区域，$R_{x-}<|z|<R_{x+}$；
- 因果(右)序列 z 变换的 ROC：z 平面上的某个圆外区域，$|z|>|a|$；
- 非因果(左序列)序列 z 变换的 ROC：z 平面上的某个圆内区域，$|z|<|a|$。

3. 逆 *z* 变换(IZT)

由 z 变换函数 $X(z)$，考虑具体 ROC 条件下，求对应离散时间域序列的算法，称为求"逆 z 变换"，定义如式(2.1.19)所示。求"逆 z 变换"主要有下面三种方法。

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)\, z^{n-1}\mathrm{d}z, \quad c \in (R_{x-}, R_{x+}) \tag{2.1.19}$$

1）幂级数法（长除法）

根据 z 变换的定义，因果序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}$，各 z^{-n} 幂次的系数就是原序列，$x(n)=[x(0),x(1),x(2),\cdots]$。

若已知的 z 变换不是幂级数，要用长除法求其幂级数形式。注意，这种方法较适用于单边序列，通常得到 IZT 的数值解。对因果（右）序列，$X(z)$ 应写作负幂级数，对非因果（左）序列 $X(z)$ 应写作正幂级数。

2）部分分式展开法

该方法对多数具有单阶极点的序列 z 变换求逆最常用。将 $X(z)$ 写成部分分式，再对各部分分式分别求 IZT，可查表 2-2 所示的常见序列的 z 变换，最后将结果相加。

设序列 $x(n)$ 的 z 变换具有有理分式形式 $X(z)=\dfrac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$，且仅有一阶极点。对变量 z^{-1} 而言分子是 M 阶，分母是 N 阶。$X(z)$ 部分分式展开可按下列三种情况具体进行。

（1）设 $M<N$，则：

$$\begin{aligned}X(z)&=\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}\\&=\frac{P(z^{-1})}{(1-p_1z^{-1})(1-p_2z^{-1})\cdots(1-p_Nz^{-1})}\\&=\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{A_N}{1-p_Nz^{-1}}\end{aligned}\tag{2.1.20}$$

其中，$A_i=[(1-p_iz^{-1})X(z)]\big|_{z=p_i}$，$i=1,2,\cdots,N$。

（2）设 $M=N$，则：

$$X(z)=\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}=A_0+\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{A_N}{1-p_Nz^{-1}}\tag{2.1.21}$$

其中，$A_0=X(z)\big|_{z=0}$，$A_i(i=1,2,\cdots,N)$ 求法与（1）中一样。

（3）设 $M>N$，则：

$$X(z)=\frac{P(z^{-1})}{Q(z^{-1})}=\sum_{n=0}^{M-N}B_nz^{-n}+\frac{P'(z^{-1})}{Q(z^{-1})}\tag{2.1.22a}$$

$$=\sum_{n=0}^{M-N}B_nz^{-n}+\frac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\cdots+\frac{A_N}{1-p_Nz^{-1}}\tag{2.1.22b}$$

先用长除法求各系数 B_n，写出其逆 z 变换。式（2.1.22a）中第二项有理分式项 $\dfrac{P'(z^{-1})}{Q(z^{-1})}$ 写成部分分式，其系数的求法和（1）中一样。

表 2-2　常见序列的 z 变换

序　　列	z 变换	收　敛　域
$\delta(n)$	1	全面 z 平面
$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$a^nu(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$

续表

序 列	z 变换	收 敛 域
$R_N(n)$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>0$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|<\|a\|$
$nu(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$\|z\|>1$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$e^{j\omega_0 n}u(n)$	$\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$e^{-an}\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}e^{-a}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$\|z\|>e^{-a}$
$e^{-an}\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-a}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2a}}$	$\|z\|>e^{-a}$
$\sin(\omega_0 n+\theta)u(n)$	$\frac{\sin\theta+z^{-1}\sin(\omega_0-\theta)}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$(n+1)a^n u(n)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u(n)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^3}$	$\|z\|>\|a\|$
$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!}a^n u(n)$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^{m+1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$\frac{n(n-1)}{2!}u(n)$	$\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}$	$\|z\|>1$
$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u(n)$	$\frac{z^{-3}}{(1-z^{-1})^4}$	$\|z\|>1$

3）围线积分法(留数法)

(1) 留数定理：若 $X(z)z^{n-1}$ 在逆时针围线 c 内的极点有 N_1 个，用 z_{1k}，$k=1,2,\cdots,N_1$ 表示，则 $X(z)$ 的逆 z 变换定义如式(2.1.23)所示，其中 c 是 $X(z)$ 的收敛域上，绕 z 平面原点的逆时针围线。

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_{k=1}^{N_1}\text{Res}[X(z)z^{n-1},z_{1k}] \tag{2.1.23}$$

若 z_{1k} 是一阶极点：

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1},z_{1k}]=(z-z_{1k})X(z)z^{n-1}\big|_{z=z_{1k}} \tag{2.1.24a}$$

若 z_{1k} 是 N 阶极点：

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_{1k}]=\frac{1}{(N-1)!}\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}z^{N-1}}[(z-z_{1k})^N X(z)z^{n-1}]\big|_{z=z_{1k}} \tag{2.1.24b}$$

(2) 留数辅助定理：设 $X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，$P(z)$、$Q(z)$的阶次分别为 M、N，当 $N-M-n+1\geqslant 2$，即 $N-M-n\geqslant 1$ 时，有

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{N_1}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_{1k}]\\&=-\sum_{k=1}^{N_2}\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_{2k}]\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

式(2.1.25)中，N_2表示围线 c 外的极点个数，这些极点可用 z_{2k}，$k=1,2,\cdots,N_2$表示。当 $N_2<N_1$时，或围线 c 外的极点均是一阶极点时，用留数辅助定理求逆 z 变换，则更加简单。

4. z 变换的性质和定理

设序列 $x(n)$、$y(n)$和 $h(n)$的 z 变换分别为 $X(z)$、$Y(z)$和 $H(z)$，则 z 变换的性质和定理如表 2-3 所示。

表 2-3　z 变换的性质和定理

序号	名称	序列	z 变换
1	(a_1，a_2 为任意常数)线性	$a_1x(n)+a_2y(n)$	$a_1X(z)+a_2Y(z)$
2	移位(时域延时 D)	$x(n-D)$	$z^{-D}X(z)$
3	乘指数序列 (z 域尺度变换)	$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$
4	序列卷积	$y(n)=h(n)*x(n)$	$Y(z)=H(z)X(z)$
5	初值定理	$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$	
6	终值定理	$\lim\limits_{n\to\infty}x(n)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)=\mathrm{Res}[X(z),1]$	
7	DTFT 与 ZT 的关系	$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$，要求 $x(n)$ 绝对可和 $X(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$，应同时确定 $X(z)$ 的收敛域	
8	帕斯瓦尔定理	$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)z^{-n}=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_c X(v)Y^*\left(\frac{z}{v^*}\right)v^{-1}\mathrm{d}v$	

5. 利用 z 变换求数字系统的输出

通过 z 变换可将时域 I/O 差分方程变成 z 域上的代数方程，使时域 I/O 差分方程求解过程简单。

设 N 阶 LTI 系统的线性常系数时域 I/O 差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r) \tag{2.1.26}$$

1）求系统的稳态解

如果输入序列 $x(n)$是在 $n=0$ 以前（$[-\infty,0]$）时加上的，n 时刻的 $y(n)$是时域 I/O 差分方程的稳态解。对式(2.1.26)求 z 变换，根据 z 变换的线性和延迟性质，得

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z)$$

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X(z)$$

$$\equiv H(z)\ X(z) \tag{2.1.27}$$

其中

$$H(z) \equiv \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{2.1.28}$$

$$y(n) = \mathrm{IZT}[Y(z)] = \mathrm{IZT}[H(z)X(z)] \tag{2.1.29}$$

式(2.1.28)中，$H(z)$称为时域 I/O 差分方程。式(2.1.26)描述 LTI 系统的“系统函数”，该系统对输入 $x(n)$的时域稳态响应，即式(2.1.29)中的 $y(n)$。

2）求系统的完全响应

对于 N 阶 LTI 系统的时域 I/O 差分方程，求完全解（响应）必须已知 N 个初始条件。设输入 $x(n)$是因果序列，即 $n<0$ 时，$x(n)=0$。已知初始条件 $y(-1), y(-2), \cdots, y(-N)$，则系统完全响应（输出）$y(n)$的 z 变换如式(2.1.30)所示。

$$Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} X(z) - \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} \sum_{i=-k}^{-1} y(i) z^{-i}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{2.1.30}$$

式(2.1.30)右边第一部分与系统初始状态无关，对应解为零状态解 $y_{zs}(n)$；第二部分与输入信号 $x(n)$无关，对应解为零输入解 $y_{zi}(n)$。两部分的时域解之和为系统的完全响应 $y(n)$：

$$y(n) = y_{zs}(n) + y_{zi}(n) \tag{2.1.31}$$

2.1.6　用 ZT 分析系统的因果性、稳定性和频响特性

1．传输函数与系统函数

设数字系统的单位采样脉冲响应为 $h(n)$，则

传输函数：指 $h(n)$的 DTFT，即 $H(e^{j\omega})$。

系统函数：指 $h(n)$的 z 变换，即 $H(z)$。

$$H(z) \equiv \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = A \frac{\prod_{r=1}^{M} (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})} \tag{2.1.32}$$

数字系统的时域、z 域、频域输入输出及系统特性的关系如式(2.1.33)～式(2.1.35)所示。

$$\text{时域：} y(n)=h(n)*x(n) \tag{2.1.33}$$

$$z\text{ 域：} Y(z)=H(z)X(z) \tag{2.1.34}$$

$$\text{频域：} Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \tag{2.1.35}$$

如果 $H(z)$的 ROC 包含 z 平面上的单位圆，则传输函数 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=H(z)|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}$。

2. 因果性和稳定性

设 $H(z)=\dfrac{A_1}{1-p_1z^{-1}}+\dfrac{A_2}{1-p_2z^{-1}}+\dfrac{A_3}{1-p_3z^{-1}}+\cdots$，其中，$p_i(i=1,2,3,\cdots)$是系统函数 $H(z)$的极点。

系统函数的 ROC 和系统因果性、稳定性的关系如表 2-4 所示。

表 2-4 系统函数的 ROC 和系统因果性、稳定性的关系

系统名称	系统函数 $H(z)$的 ROC
因果系统	$\lvert z\rvert>\max\limits_i \lvert p_i\rvert$
非因果系统	$\lvert z\rvert<\max\limits_i \lvert p_i\rvert$
因果，非因果混合系统	$\lvert p_a\rvert<\lvert z\rvert<p_b\rvert$ 半径为$\lvert p_a\rvert$的内圆以内(含内圆上)的极点对应数字系统因果部分的极点，半径为$\lvert p_b\rvert$的外圆外(含外圆上)的极点对应数字系统非因果部分的极点
稳定系统	ROC 包含 z 平面上的单位圆
稳定的因果系统	ROC 包含 z 平面上的单位圆，且所有极点在单位圆内，单位圆上无极点，即 $r\leqslant\lvert z\rvert\leqslant\infty$，且 $0<r<1$

3. 信号频谱/系统频响的几何解释

设稳定系统的最简单情况，式(2.1.32)中取 $A=1$，且只有一个零点 $c_r=|c_r|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1}(|c_r|>1)$为实数，一个极点 $d_k=|d_k|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_1}(0<|\mathrm{d}_k|<1)$为实数，如图 2-1 所示，则系统函数简化为式(2.1.36)。

$$H(z)=A\frac{\prod\limits_{r=1}^{M}(1-c_rz^{-1})}{\prod\limits_{k=1}^{N}(1-\mathrm{d}_kz^{-1})}=\frac{(1-c_rz^{-1})}{(1-d_kz^{-1})} \tag{2.1.36}$$

如果令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$(取 z 平面单位圆上的值)，得系统频响：

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{(1-c_r\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{(1-d_k\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-c_r}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-d_k} \tag{2.1.37}$$

1) 幅频特性

数字系统频率响应的模$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$叫做“幅频特性”“幅度响应”或“振幅特性”，如式(2.1.38)所示。

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-c_r|}{|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-d_k|} \tag{2.1.38}$$

由式(2.1.38)可见,当单位圆上的 B 点 $z=e^{j\omega}$,在极点 d_k 附近时,幅频特性出现峰值点。在零点 c_r 附近时,幅频特性出现谷值点,如图 2-2 所示。

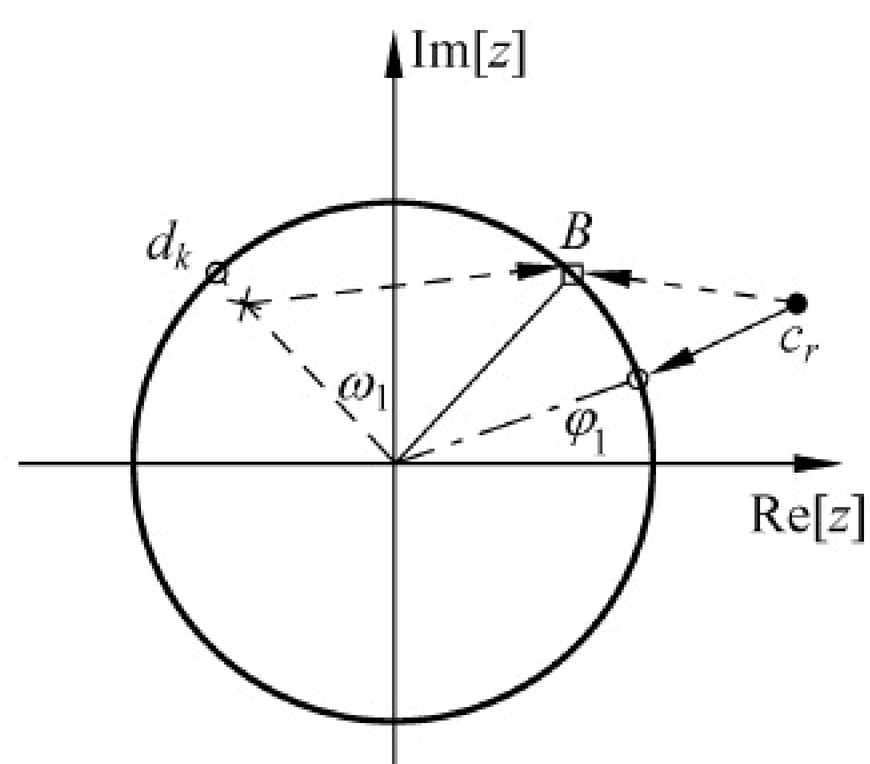


图 2-1　系统频响零点、极点示意图

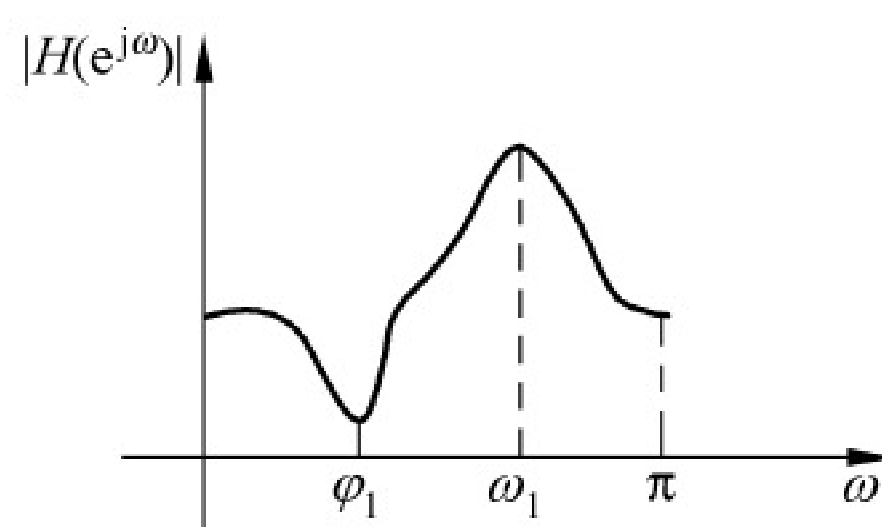


图 2-2　零点、极点对 $|H(e^{j\omega})|$ 的影响

2) 相频特性

数字系统频率响应的相位 $\arg[H(e^{j\omega})]=\arctan\left(\frac{\mathrm{Im}[H(e^{j\omega})]}{\mathrm{Re}[H(e^{j\omega})]}\right)$ 叫做系统的"相频特性""相位响应"或"相位特性"。它反映了数字系统对频率为 ω 的输入序列的相位影响。

3) 常见的数字系统及其频响特性

(1) 因果稳定系统:

① 最小相位系统:系统函数的全部极点、零点均在 z 平面单位圆内。

② 最大相位系统:系统函数的全部极点在 z 平面单位圆内,全部零点在单位圆外。

(2) 因果稳定混合相位系统:系统函数的全部极点在 z 平面单位圆内;零点在 z 平面单位圆内、外都有。

(3) 全通系统:数字系统的振幅特性对所有频率 ω 都等于常数,不失一般地取 1,即 $|H(e^{j\omega})|\equiv 1$,是纯相位滤波系统,常用于相位均衡。

特别注意:

- 任何非最小相位系统均可分解为最小相位系统和全通系统的级联。
- 幅频特性相同的所有因果稳定系统中,最小相位系统的输出信号相对输入信号的相位延迟最小。
- 最小相位系统 $H(z)$ 的逆系统 $H_{\mathrm{inv}}(z)$ 存在,如式(2.1.39)所示。

$$H_{\mathrm{inv}}(z)=\frac{1}{H(z)}=\frac{A(z)}{B(z)} \tag{2.1.39}$$

2.2　习题解答

2-1　设序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$,求下列序列的傅里叶变换。

(1) $x^*(n)$;

(2) $\mathrm{Re}[x(n)]$;

(3) $x(2n)$;

（4）$g(n)=\begin{cases} x\left(\dfrac{n}{2}\right), & n\text{ 为偶数} \\ 0, & n\text{ 为奇数} \end{cases}$。

解：由傅里叶变换对的定义

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

可以求解如下。

（1）$\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(-\omega)n}\right)^* = X^*(e^{-j\omega})$

（2）因为

$$\mathrm{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}(x(n)+x^*(n))$$

故

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}[x(n)]e^{-j\omega n} = \frac{1}{2}(X(e^{j\omega})+X^*(e^{-j\omega})) = X_e(e^{j\omega})$$

其中，$X_e(e^{j\omega})$表示 $X(e^{j\omega})$的共轭对称部分。

（3）设 $g(n)=x(2n)$，其傅里叶变换为

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(2n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty(n\text{为偶数})}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\frac{n}{2}} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}[x(n)+(-1)^n x(n)]e^{-j\omega\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega\frac{n}{2}} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\pi n}x(n)e^{-j\omega\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-jn(-\pi+\frac{\omega}{2})}x(n) \\ &= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}X(e^{j(-\pi+\frac{\omega}{2})}) \\ &= \frac{1}{2}X(e^{j\frac{\omega}{2}}) + \frac{1}{2}X(-e^{j\frac{\omega}{2}}) \end{aligned}$$

（4）设 $g(n)$的傅里叶变换为 $G(e^{j\omega})$，根据定义，有

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty(n\text{为偶数})}^{\infty} x\left(\frac{n}{2}\right)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\omega n} = X(e^{j2\omega}) \end{aligned}$$

2-2 求下列序列 $x(n)$的频谱 $X(e^{j\omega})$。

（1）$\delta(n-n_0)$；

（2）$e^{-an}u(n)$；

（3）$e^{-(2+j\omega_0)n}u(n)$；

(4) $e^{-\alpha n}u(n)\cos(\omega_0 n)$。

解：根据 ZT 和 FT 的关系，可求解如下。

(1) $X(z)=Z[x(n)]=Z[\delta(n-n_0)]=z^{-n_0}$，ROC：$|z|>0$

$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=e^{-j\omega n_0}$

(2) $X(z)=Z[e^{-\alpha n}u(n)]=\dfrac{1}{1-e^{-\alpha}z^{-1}}$，ROC：$|z|>e^{-\alpha}$

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{1-e^{-\alpha}e^{-j\omega}}$$

(3) $X(z)=Z[e^{-(2+j\omega_0)n}u(n)]=\dfrac{1}{1-e^{-(2+j\omega_0)}z^{-1}}$，ROC：$|z|>e^{-2}$

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1}{1-e^{-2}\cdot e^{-j(\omega+\omega_0)}}$$

(4) $X(z)=Z[e^{-\alpha n}u(n)\cos\omega_0 n]$

$$=\frac{1-z^{-1}e^{-\alpha}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}e^{-\alpha}\cos\omega_0+z^{-2}e^{-2\alpha}}，\text{ROC}：|z|>e^{-\alpha}$$

$$X(e^{j\omega})=X(z)|_{z=e^{j\omega}}=\frac{1-e^{-j\omega}e^{-\alpha}\cos\omega_0}{1-2e^{-j\omega}e^{-\alpha}\cos\omega_0+e^{-j2\omega}e^{-2\alpha}}$$

$$=\frac{1-e^{-(\alpha+j\omega)}\cos\omega_0}{1-2e^{-(\alpha+j\omega)}\cos\omega_0+e^{-2(\alpha+j\omega)}}$$

2-3　设序列 $x(n)$ 的傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$，试利用 $x(n)$ 求出下列函数对应的序列。

(1) $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$；

(2) $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$；

(3) $\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$。

解：

(1) 解法 1：利用逆 DTFT 定义式。

设

$$x_1(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j(\omega-\omega_0)})e^{j\omega n}d\omega$$

由于

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

令 $\omega'=\omega-\omega_0$，则有

$$x_1(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-\omega_0}^{\pi-\omega_0}X(e^{j\omega'})e^{j\omega_0 n}e^{j\omega' n}d\omega'$$

因 $X(e^{j\omega})$ 具有 2π 的周期性，所以有

$$x_1(n)=e^{j\omega_0 n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega'})e^{j\omega' n}d\omega'=e^{j\omega_0 n}\cdot x(n)$$

所以 $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ 对应的序列是 $e^{j\omega_0 n}\cdot x(n)$。

解法 2：利用 DTFT 定义式

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

则

$$X(e^{j(\omega-\omega_0)})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[e^{j\omega_0 n}\cdot x(n)]\cdot e^{-j\omega n}$$

所以 $X(e^{j(\omega-\omega_0)})$ 对应的序列是 $e^{j\omega_0 n}\cdot x(n)$。本题也证明了 DTFT 的频移定理。

（2）由于

$$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^*(e^{j\omega})]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)e^{j\omega n}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(-n)e^{-j\omega n}\right]$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)+x^*(-n)]e^{-j\omega n}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_e(n)e^{-j\omega n}$$

其中，$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]$ 是序列 $x(n)$ 的共轭对称部分，所以 $\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$ 对应的序列为 $x_e(n)$。

（3）因为

$$\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]=-j\left[\frac{1}{2}X(e^{j\omega})-\frac{1}{2}X^*(e^{j\omega})\right]$$
$$=\frac{-j}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)e^{j\omega n}\right)$$
$$=\frac{-j}{2}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(-n)e^{-j\omega n}\right)$$
$$=\frac{-j}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)-x^*(-n)]e^{-j\omega n}$$
$$=-j\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_o(n)e^{-j\omega n}$$

其中，$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$ 是序列 $x(n)$ 的共轭反对称部分，所以 $\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$ 对应的序列为 $-j\cdot x_o(n)$。

2-4 求以下序列的 z 变换，并求出其对应的零极点和收敛域。

（1）$x(n)=a^{|n|}$， $0<|a|<1$；

（2）$x(n)=Ar^n\cos(\omega_0 n+\phi)u(n)$， $0<r<1$；

（3）$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$；

（4）$x(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$；

(5) $x(n)=2^{-n}[u(n)-u(n-10)]$。

解：

(1) 由 z 变换的定义可知

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a^{|n|}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}a^{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}z^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}(az)^{n}+\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^{n}$$

$$=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-\frac{a}{z}}=\frac{1-a^2}{(1-az)(1-az^{-1})}$$

$$=\frac{(a^2-1)z}{a\left(z-\frac{1}{a}\right)(z-a)}$$

$$\text{收敛域：}|az|<1,\quad \text{且}\quad \left|\frac{a}{z}\right|<1$$

即

$$|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$$

$$\text{极点：}z=a,\quad z=\frac{1}{a}$$

$$\text{零点：}z=0,\quad z=\infty$$

(2) 将其分解为标准的指数序列形式，然后根据 z 变换的求和定义式求得其对应的 z 变换、收敛域并求出零极点。

$$x(n)=Ar^n\cos(\omega_0 n+\phi)u(n)$$
$$=Ar^n\frac{e^{j(\omega_0 n+\phi)}+e^{-j(\omega_0 n+\phi)}}{2}u(n),\quad 0<r<1$$

其 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}Ar^n\cos(\omega_0 n+\phi)z^{-n}$$
$$=A\sum_{n=0}^{\infty}r^n\frac{e^{j(\omega_0 n+\phi)}+e^{-j(\omega_0 n+\phi)}}{2}z^{-n}$$
$$=\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{j\phi}(re^{j\omega_0}z^{-1})^n+\frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-j\phi}(re^{-j\omega_0}z^{-1})^n$$
$$=\frac{A}{2}e^{j\phi}\frac{1}{(1-re^{j\omega_0}z^{-1})}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}\frac{1}{(1-re^{-j\omega_0}z^{-1})}$$
$$=\frac{A[\cos\phi-rz^{-1}\cos(\omega_0-\phi)]}{(1-2rz^{-1}\cos\omega_0+r^2z^{-2})}$$

收敛域：$|z|>|r|$

极点：$z=re^{j\omega_0},\quad z=re^{-j\omega_0}$

零点：$z=0,\quad z=\dfrac{r\cos(\omega_0-\phi)}{\cos\phi}$

(3) 由 z 变换的定义可知

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\cdot z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

依题意，该序列为因果序列，故

$$收敛域：\left|\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}\right|<1$$

即

$$|z|>\frac{1}{2}$$

$$极点：z=\frac{1}{2}$$

$$零点：z=0$$

（4）由 z 变换的定义可知

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)z^{-n} = \sum_{n=-1}^{-\infty} -\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

$$\xlongequal{m=-n} \sum_{n=1}^{\infty} -2^n z^n = \frac{2z}{1-2z} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

依题意知 $x(n)$ 为非因果序列，故

$$收敛域：|z|<\frac{1}{2}$$

$$极点：z=\frac{1}{2}$$

$$零点：z=0$$

（5）由 z 变换的定义知

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n}[u(n)-u(n-10)]z^{-n}$$

$$=\sum_{n=0}^{9} 2^{-n}z^{-n} = \frac{1-2^{-10}z^{-10}}{1-2^{-1}z^{-1}}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}z^{-10}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$X(z)$ 的极点为 $z=0$。

依题意，该因果有限长序列是稳定的，故其收敛域为 $|z|>0$。

2-5 试利用 $x(n)$ 的 z 变换求 $n^2x(n)$ 的 z 变换。

解：$nx(n)$ 的 z 变换为

$$Z[nx(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} nx(n)z^{-n} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = -zX'(z)$$

则

$$Z[n^2x(n)] = -z\{Z[nx(n)]\}' = -z[-zX'(z)]'$$

$$= -z[-X'(n) - zX''(z)]$$
$$= zX'(z) + z^2X''(z)$$

2-6 有一右边序列 $x(n)$，其 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})}$$

(1) 将上式作部分分式展开(用 z^{-1} 表示)，由展开式求 $x(n)$。

(2) 将上式表示成 z 的多项式之比，再作部分分式展开，由展开式求 $x(n)$，并说明得到的序列与(1)所得的是一样的。

解：

(1) 因为 $X(z)=\dfrac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\dfrac{2}{1-z^{-1}}$，且 $x(n)$是右边序列，所以

$$x(n) = \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

(2) $X(z)=\dfrac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}=1+\dfrac{\frac{3}{2}z-\frac{1}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-1)}=1+\dfrac{-\frac{1}{2}}{z-\frac{1}{2}}+\dfrac{2}{z-1}$

则

$$x(n) = \delta(n)-\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)+2u(n-1) = \left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

2-7 有一信号 $y(n)$，它与另两个信号 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的关系是

$$y(n) = x_1(n+3) * x_2(-n+1)$$

其中，$x_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$，$x_2(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$。已知 $Z[a^n u(n)]=\dfrac{1}{1-az^{-1}}$，$|z|>|a|$，利用 z 变换的性质求 $y(n)$的 z 变换 $Y(z)$。

解：根据题目所给条件可得

$$x_1(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad \text{ROC}: |z|>\frac{1}{2}$$

$$x_2(n) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad \text{ROC}: |z|>\frac{1}{3}$$

又由移位定理，得

$$x_1(n+3) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{2}$$

$$x_2(-n) \overset{z}{\longleftrightarrow} X_2(z^{-1}) = \frac{1}{1-\frac{1}{3}z}, \quad |z^{-1}|>\frac{1}{3}$$

$$x_2(-n+1) \overset{z}{\longleftrightarrow} \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z}, \quad |z|<3$$

而

$$y(n)=x_1(n+3)*x_2(-n+1)$$

所以

$$Y(z)=Z[x_1(n+3)]\cdot Z[x_2(-n+1)]$$
$$=\frac{z^3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\cdot\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z}=-\frac{3z^3}{(z-3)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\quad \frac{1}{2}<|z|<3$$

2-8 设 $x(n)$是一离散时间信号，其 z 变换 $X(z)$已知。求下列信号的 z 变换：

(1) $x_1(n)=\nabla x(n)$，这里∇记作一次后向差分算子，定义为

$$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$$

(2) $x_2(n)=\begin{cases}x\left(\frac{n}{2}\right), & n\text{ 为偶数}\\ 0, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$

(3) $x_3(n)=x(2n)$。

解：

(1) $Z[\nabla x(n)]=Z[x(n)]-Z[x(n-1)]=X(z)-z^{-1}X(z)=(1-z^{-1})X(z)$

(2) $Z[x_2(n)]=\sum\limits_{n=2m}x\left(\frac{n}{2}\right)z^{-n}$，$m$ 为整数，$m\in(-\infty,\infty)$。

令 $m=\frac{n}{2}$，则

$$Z[x_2(n)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-2m}=X(z^2)$$

(3) 令 $m=2n$，则

$$Z[x_3(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(2n)z^{-n}=\sum_{m=2n}x(m)z^{-\frac{m}{2}},\quad n\text{ 为整数}$$

由此可设

$$x(m)=\frac{1}{2}[1+(-1)^m]x(m)$$

可得

$$Z[x_3(n)]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}[1+(-1)^m]x(m)z^{-\frac{m}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)z^{-\frac{m}{2}}+\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)(-z^{\frac{1}{2}})^{-m}$$
$$=\frac{1}{2}[X(z^{\frac{1}{2}})+X(-z^{\frac{1}{2}})]$$

2-9 已知序列的 z 变换

$$X(z)=\frac{3}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2}{1-2z^{-1}}$$

求出对应 $X(z)$的各种可能的序列表达式。

解：$X(z)$有两个极点：$z_1=0.5$，$z_2=2$。因为收敛域总是以极点为界，因此收敛域有以下三种情况。

（1）当收敛域$|z|<0.5$时，对应非因果序列，根据基本z变换表格，可得序列$x(n)$。亦可用逆z变换的定义求解：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

令

$$F(z)=X(z)z^{n-1}=\frac{5-7z^{-1}}{(1-0.5z^{-1})(1-2z^{-1})}z^{n-1}=\frac{5z-7}{(z-0.5)(z-2)}z^{n}$$

$n\geqslant 0$，因为c内$F(z)$无极点，$x(n)=0$；

$n\leqslant -1$，c内$F(z)$极点为0，但$z=0$是一个n阶极点，改为求c环路外极点留数，环路外极点有$z_1=0.5$，$z_2=2$，那么

$$\begin{aligned}x(n)&=-\operatorname{Res}[F(z),0.5]-\operatorname{Res}[F(z),2]\\&=-\frac{(5z-7)z^n}{(z-0.5)(z-2)}(z-0.5)\Big|_{z=0.5}-\frac{(5z-7)z^n}{(z-0.5)(z-2)}(z-2)\Big|_{z=2}\\&=-\left[3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\times 2^n\right]u(-n-1)\end{aligned}$$

综合起来，有

$$x(n)=-\left[3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\times 2^n\right]u(-n-1)$$

（2）当收敛域$0.5<|z|<2$时，对应着因果、非因果混合序列。亦可由逆z变换定义求解，即

$$F(z)=\frac{5z-7}{(z-0.5)(z-2)}z^n$$

$n\geqslant 0$，c内$F(z)$极点为0.5；$x(n)=\operatorname{Res}[F(z),0.5]=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$；

$n<0$，c内$F(z)$极点为0，0.5，但$z=0$是一个n阶极点，改为求c环路外极点留数，c环路外极点只有一个$z=2$，那么

$$x(n)=-\operatorname{Res}[F(z),2]=-2\times 2^n u(-n-1)$$

综合起来，有

$$x(n)=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)-2\times 2^n u(-n-1)$$

（3）当收敛域$2<|z|$时，

$$F(z)=\frac{(5z-7)z^n}{(z-0.5)(z-2)}$$

$n\geqslant 0$，c内$F(z)$极点为0.5，2；

$$x(n)=\operatorname{Res}[F(z),0.5]+\operatorname{Res}[F(z),2]=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\times 2^n$$

$n<0$，由收敛域判断这是一个因果序列，因此$x(n)=0$。

最后得

$$x(n)=\left[3\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\times 2^n\right]u(n)$$

2-10 已知 $x(n)=(a)^n u(n)$，$0<a<1$，分别求：

（1）$x(n)$的 z 变换；

（2）$nx(n)$的 z 变换；

（3）$x(-n)=a^{-n}u(-n)$的 z 变换。

解：

（1）$X(z)=Z[a^n u(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u(n) z^{-n}=\frac{1}{1-az^{-1}}$，$|z|>a$

（2）$X(z)=Z[nx(n)]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)=\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$，$|z|>a$

（3）$X(z)=Z[a^{-n}u(-n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{-n}u(-n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{0} a^{-n}z^{-n}$

令 $n=-m$，代入得

$$X(z)=\sum_{m=\infty}^{0} a^m z^m=\sum_{m=0}^{\infty}(az)^m$$

当$|z|<\frac{1}{a}$时，$X(z)$收敛，故

$$X(z)=\frac{1}{1-(az)}$$

$X(z)$的极点为 $z=\frac{1}{a}$，收敛域为$|z|<\frac{1}{a}$。

2-11 设线性时不变系统的系统函数 $H(z)$为

$$H(z)=\frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}},\quad a \text{ 为实数}$$

（1）在 z 平面上用几何法证明该系统是全通网络，即$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=$常数；

（2）参数 a 如何取值，才能使因果系统稳定？画出极点、零点分布并指出收敛域。

解：

（1）$H(z)=\frac{1-a^{-1}z^{-1}}{1-az^{-1}}=\frac{z-a^{-1}}{z-a}$，极点为 a，零点为 a^{-1}。

解法一（几何法）：设 $a=0.6$，极零点分布图如图 2-3 所示，由图可知系统的幅频响应$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$等于极点矢量的长度除以零点矢量的长度，即

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\left|\frac{z-a^{-1}}{z-a}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-a^{-1}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}-a}\right|=\frac{AB}{AC}$$

由图 2-3 可知$\triangle AOB\backsim\triangle AOC$，故$\frac{AB}{AC}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{a}$为常数，即 $H(z)$是一个全通网络。

解法二（代数法）：令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$ 代入 $H(z)$，得

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1-a^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}=\frac{1-a^{-1}(\cos\omega-\mathrm{j}\sin\omega)}{1-a(\cos\omega-\mathrm{j}\sin\omega)}$$

取模，得

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\sqrt{\frac{(1-a^{-1}\cos\omega)^2+(a^{-1}\sin\omega)^2}{(1-a\cos\omega)^2+(a\sin\omega)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-2\frac{\cos\omega}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2}{1-2a\cos\omega+a^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-2a\cos\omega+1}{a^2(1-2a\cos\omega+a^2)}}=\frac{1}{|a|}$$

为常数。故 $H(z)$是一个全通网络。

(2) 只有选择$|a|<1$ 才能使系统因果稳定。设 $a=0.6$,系统零点、极点分布图如图 2-4 所示。

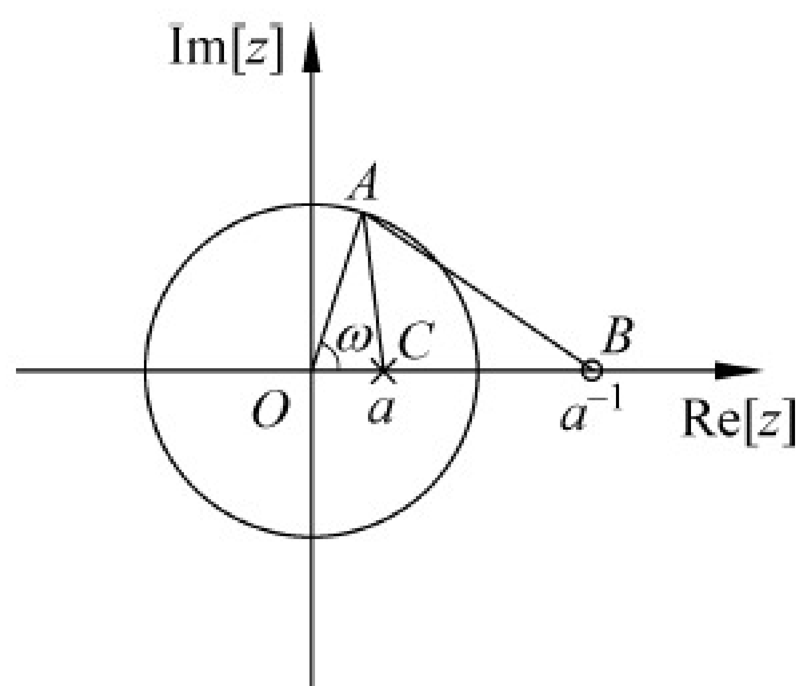


图 2-3 题　2-11 解图一

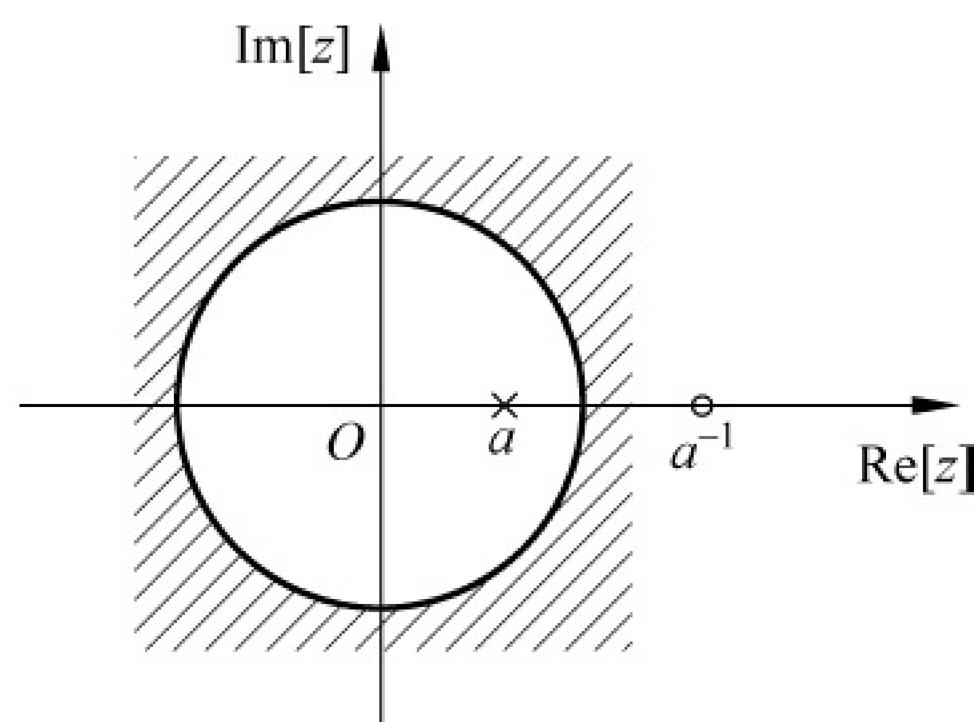


图 2-4 题　2-11 解图二

2-12　已知线性因果网络的输入、输出分别为 $x(n)$、$y(n)$,用下面 I/O 差分方程描述:

$$y(n)=0.9y(n-1)+x(n)+0.9x(n-1)$$

(1) 求网络的系统函数 $H(z)$及其单位采样脉冲响应 $h(n)$;

(2) 写出网络传输函数 $H(e^{j\omega})$的表达式,并定性画出其幅频特性曲线;

(3) 设输入 $x(n)=e^{j\omega_0 n}$,求输出 $y(n)$。

解:

(1)

$$y(n)=0.9y(n-1)+x(n)+0.9x(n-1)$$

$$Y(z)=0.9z^{-1}Y(z)+X(z)+0.9X(z)z^{-1}$$

$$H(z)=\frac{1+0.9z^{-1}}{1-0.9z^{-1}},\quad \text{ROC}: |z|>0.9$$

$$h(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c H(z)z^{n-1}dz$$

令

$$F(z)=H(z)z^{n-1}=\frac{z+0.9}{z-0.9}z^{n-1}$$

$n\geqslant 1$,收敛域上环路 c 内有极点 0.9,则

$$h(n)=\text{Res}[F(z),0.9]=\frac{z+0.9}{z-0.9}z^{n-1}(z-0.9)\big|_{z=0.9}=2\times 0.9^n$$

$n=0$,环路 c 内有极点 0.9,0,则

$$h(n)=\text{Res}[F(z),0.9]+\text{Res}[F(z),0]$$

$$=\frac{z+0.9}{(z-0.9)z}(z-0.9)\big|_{z=0.9}+\frac{z+0.9}{(z-0.9)z}z\big|_{z=0}$$

$$h(0)=1$$

最后得

$$h(n)=2\times 0.9^n u(n-1)+\delta(n)$$

（2）$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=Z[h(n)]=\dfrac{1+0.9z^{-1}}{1-0.9z^{-1}}\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}}=\dfrac{1+0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{1-0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}$

零点 $z=-0.9$，极点 $z=0.9$。系统零点、极点分布图和幅频特性如图 2-5 和图 2-6 所示。

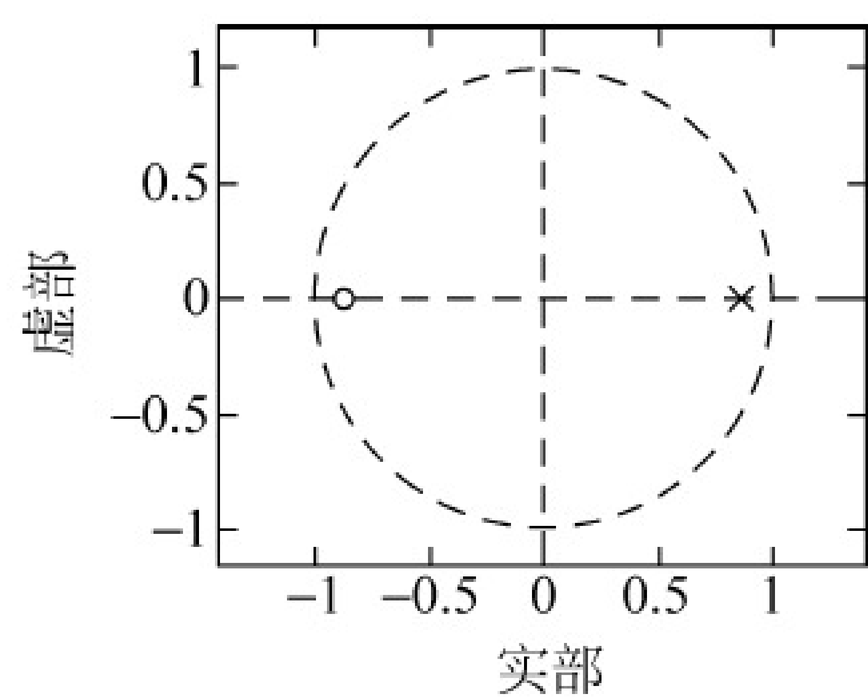


图 2-5　题 2-12 解图一

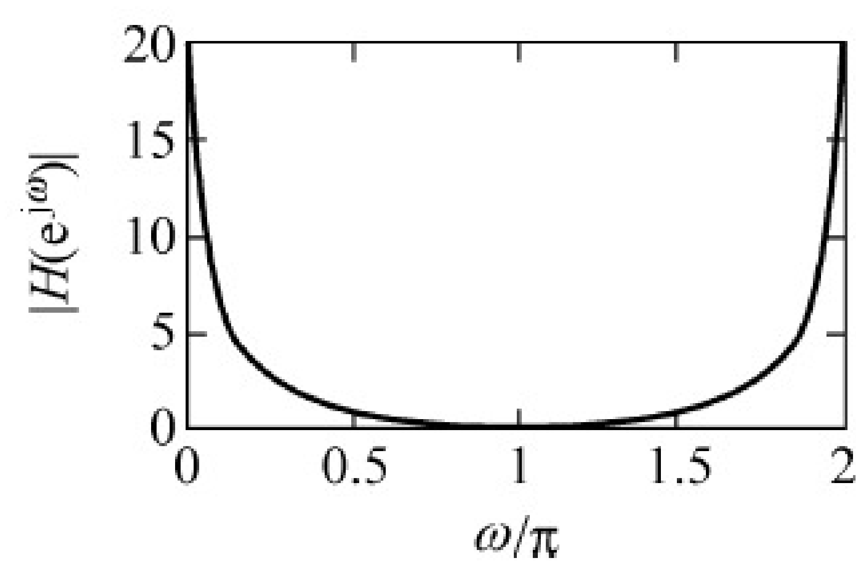


图 2-6　题 2-12 解图二

（3）$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$

$$y(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}\frac{1+0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}{1-0.9\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0}}$$

第3章 离散傅里叶变换

CHAPTER 3

3.1 重点内容

3.1.1 引言

1. 傅里叶变换的几种形式

根据不同时域信号的谱分析及其频域表述，对傅里叶变换的4种形式归纳如表3-1所示。

表3-1 4种傅里叶变换形式表达式及波形特征

名称	变换表达式	时间函数	频谱函数
连续时间信号的傅里叶变换(FT)	$X(\mathrm{j}\Omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}t$ $x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}\Omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t}\mathrm{d}\Omega$		
傅里叶级数(FS)	$X(\mathrm{j}k\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\Omega_0 t}\mathrm{d}t$ $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\mathrm{j}k\Omega_0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\Omega_0 t}$		
序列的傅里叶变换(DTFT)	$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$ $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$		
离散傅里叶级数(DFS)	$\widetilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\widetilde{x}(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$ $\widetilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$		

2. 信号函数时域和频域的波形特征

信号函数时域和频域的波形特征的对应关系归纳如表 3-2 所示。

表 3-2 信号函数时域和频域的波形特征的对应关系

类型	函数性质			
时域函数	连续的	非周期	具有周期(T)	采样形式(样值点间隔 T_s 秒,对应的采样率 f_s Hz)
频域函数	非周期	连续的	离散的线谱,角频率间隔$\left(\Omega=\frac{2\pi}{T}\right)$	具有周期性(模拟频率域周期为 f_s Hz;数字频率域周期为 2π rad)

3.1.2 离散傅里叶变换的定义

1. DFT 和 IDFT 的定义

离散时间信号 $x(n)$是长度为 L 的有限长序列,其 $N(N\geqslant L)$点 DFT 定义为

$$X(k) \equiv \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{L-1} x(n)W_N^{kn}$$
$$\equiv |X(k)| \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(k)}, \quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{3.1.1}$$

其中,$W_N=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$,称为 N 点 DFT 的变换因子。

N 点 IDFT 定义如式(3.1.2)所示。

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn}, \quad n=0,1,2,\cdots,L-1,\cdots,N-1 \tag{3.1.2}$$

> **特别提示:**
> - N 点 DFT 把时域有限长序列 $x(n)$变换成数字频率域有限长序列 $X(k)$,且 $X(k)$隐含周期性,周期为 N。
> - 序列 $x(n)$及其后补零序列,进行相同变换区间长度的 DFT,结果是一样的。
> - $x(n)$前补 D 个零的序列 $g(n)$的 N 点 DFT $G(k)$,与原 $x(n)$的 N 点 DFT $X(k)$幅度相同,相位差 $-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}Dk$ rad。

2. DFT 和 z 变换的关系

设序列 $x(n)$长为 N,$x(n)$的 z 变换、DTFT 和 N 点 DFT 分别记为 $X(z)$、$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$和 $X(k)$,则 $X(z)$、$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$和 $X(k)$满足式(3.1.3)~式(3.1.5)。

$$X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} = \mathrm{DFT}[x(n)] \equiv X(k) \tag{3.1.3}$$

即

$$X(k) = X(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}, \quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{3.1.4}$$

$$X(k) = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}, \quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{3.1.5}$$

式(3.1.4)表明:$X(k)$是对 $X(z)$在 z 平面单位圆上的 N 点等间隔采样值 $X(z_k)$,$z_k=$

$e^{j\frac{2\pi}{N}k}$，$k=0,1,\cdots,N-1$。$X(k)$也是等效于对 $x(n)$的 DTFT，$X(e^{j\omega})$在$[0,2\pi]$的频率范围内的 N 点等间隔采样值 $X(e^{jk\omega_1})$，频率间隔为 $\omega_1=\dfrac{2\pi}{N}$弧度。

3. 周期序列与有限长序列的内在联系

1）时域关系

$x(n)$是周期序列$\tilde{x}(n)$的主值序列；$\tilde{x}(n)$是 $x(n)$的周期延拓。

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n), & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0, & \text{其他 } n\end{cases},\quad N\text{ 为周期序列的周期} \tag{3.1.6}$$

$$\tilde{x}(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(mN+n_1),\quad 0\leqslant n_1\leqslant N-1 \tag{3.1.7}$$

或借助单位矩形脉冲和求余运算符$((\ \cdot\ ))_N$，简记为式(3.1.8)～式(3.1.9)。

$$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n) \tag{3.1.8}$$

$$\tilde{x}(n)=x((n))_N=x(n_1),\quad 0\leqslant n_1\leqslant N-1 \tag{3.1.9}$$

其中，$((n))_N$ 是 n 对 N 做余数运算。

2）频域关系

设 $X(k)$是 $x(n)$的 N 点 DFT，$\tilde{X}(k)$是周期为 N 的$\tilde{x}(n)$的 DFS。在数字频率域，$X(k)$是周期序列$\tilde{X}(k)$的主值序列，$\tilde{X}(k)$是 $X(k)$的周期延拓。

3.1.3 离散傅里叶变换的性质

1. 线性性质

设 $x_1(n)$和 $x_2(n)$是两个长度分别为 N_1、N_2 的有限长序列，$N=\max[N_1,N_2]$；若序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$的 N 点 DFT 分别记为 $X_1(k)$、$X_2(k)$，则

$$\mathrm{DFT}[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(k)+bX_2(k),\quad a、b\text{ 为常数} \tag{3.1.10}$$

2. 序列的和

对长为 N 的序列 $x(n)$，其 N 点 DFT 记为 $X(k)$，则式(3.1.11)成立。

$$\sum_{n=0}^{N-1}x(n)=X(k)\mid_{k=0} \tag{3.1.11}$$

有限长序列 $x(n)$各采样值的和等于其 DFT 在 $k=0$ 处的 DFT 函数值。

3. 序列的初值

对长为 N 的序列 $x(n)$，其 N 点 DFT 记为 $X(k)$，则

$$x(0)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k) \tag{3.1.12}$$

4. 序列的圆周移位（循环移位）

1）圆周移位的定义

长为 N 的序列 $x(n)$移$|m|$个单位的圆周移位序列 $x_m(n)$可表示为

$$x_m(n)=x((n-m))_N R_N(n)$$

其中，$((n-m))_N$ 表示 $n-m$ 对 N 求余的运算。

循环移位的物理过程如图 3-1 所示：

（1）给定有限长序列 $x(n)$；

（2）将 $x(n)$ 周期延拓，得到无限长的周期序列 $\tilde{x}(n)=x((n))_N$；

（3）若右移位 m 个单位，$m>0$，则

$$\tilde{x}(n-m)=x((n-m))_N$$

图 3-1 中 $m=-2$，表示左移位 2 个单位：

$$\tilde{x}(n-m)=\tilde{x}(n+2)=x((n+2))_N$$

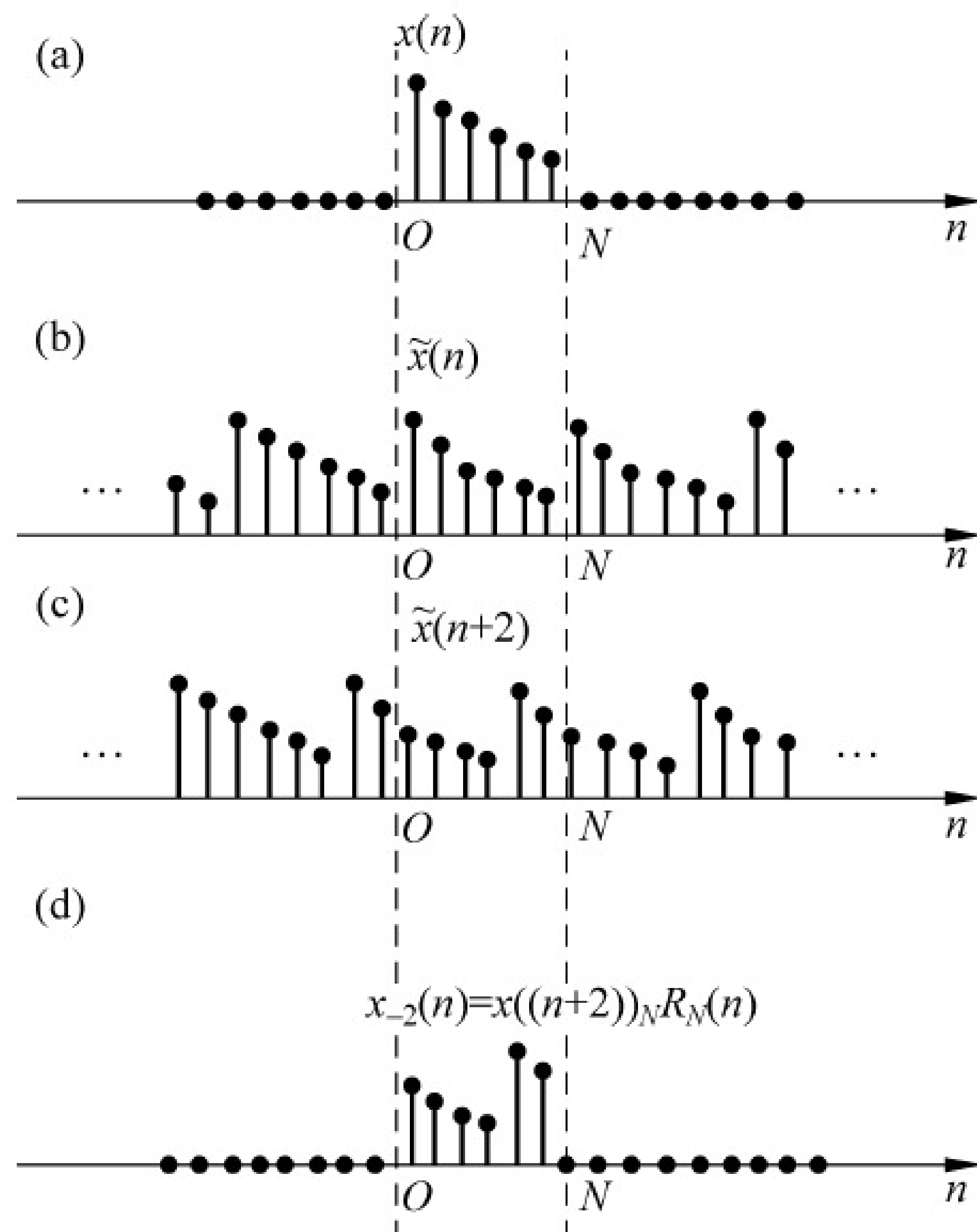


图 3-1　循环移位过程一维示意图

（4）取出主值序列：

$$x_m(n)=x((n-m))_N R_N(n)$$

$x(n)$ 循环移 $|m|$ 位的结果是与原 $x(n)$ 同样长的有限长序列。

2）时域圆周移位定理

设序列 $x(n)$ 的长为 N，$x(n)$ 在圆周上移位 m 个单位的时间移位序列记为 $x_m(n)$。$x(n)$、$x_m(n)$ 的 N 点 DFT 分别记为 $X(k)$、$X_m(k)$，则

$$\begin{aligned}X_m(k)&=\mathrm{DFT}[x_m(n)]=W_N^{km}X(k)\\&=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}X(k),\quad k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}\tag{3.1.13}$$

3）频域圆周移位定理——调制特性

若 $X_m(k)=X((k-m))_N R_N(k)$，则

$$x'(n)=\mathrm{IDFT}[X_m(k)]=W_N^{-nm}x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nm}x(n)\tag{3.1.14}$$

式(3.1.14)表明，把序列 $x(n)$ 的 DFT $X(k)$ 在数字频率域上进行圆周移位 $|m|$ 个单位得到 $X_m(k)$；对应的是原序列 $x(n)$ 在离散时间域上的“幅度调制序列 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nm}x(n)$”的谱。

5. 圆周卷积（循环卷积）及其与有限长序列线性卷积的关系

1）时域圆周卷积定理

设 $x_1(n)$、$x_2(n)$ 长分别为 N_1、N_2；$N=\max[N_1,N_2]$；$x_1(n)$、$x_2(n)$ 的 N 点 DFT 记为

$X_1(k)$、$X_2(k)$。若 $X_3(k)=X_1(k)X_2(k)$，$k=0,1,\cdots,N-1$，则

$$x_3(n)=\mathrm{IDFT}[X_3(k)],\quad n=0,1,\cdots,N-1$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N R_N(n)\equiv x_1(n)\,Ⓝ\,x_2(n) \tag{3.1.15a}$$

或

$$x_3(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N R_N(n)\equiv x_2(n)\,Ⓝ\,x_1(n) \tag{3.1.15b}$$

其中，符号Ⓝ表示 N 点圆周卷积。

2）频域循环卷积定理

设 $x_1(n)$、$x_2(n)$ 的 N 点 DFT 为 $X_1(k)$、$X_2(k)$，$k=0,1,\cdots,N-1$。如果 $x_3(n)=x_1(n)\,x_2(n)$，其 N 点 DFT 为

$$X_3(k)=\mathrm{DFT}[x_3(n)]$$

$$\equiv\frac{1}{N}X_1(k)\,Ⓝ\,X_2(k)=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X_1(j)X_2((k-j))_N R_N(k) \tag{3.1.16a}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}X_2(j)X_1((k-j))_N R_N(k)\equiv\frac{1}{N}X_2(k)\,Ⓝ\,X_1(k) \tag{3.1.16b}$$

3）循环卷积和线性卷积的关系

若 $x(n)$、$h(n)$ 长分别为 M、N，其线性卷积 $y(n)$ 长为 $L=N+M-1$，圆周卷积长至少为 $\max(N,M)$。

令 $x(n)$ 和 $h(n)$ 后面分别补 $L-M$，$L-N$ 个零，使其长均为 L；对这两个新的长为 L 的序列进行 L 点的圆周卷积，结果长 L；若取 $L\geqslant N+M-1$，则 $x(n)$ 和 $h(n)$ 的 L 点圆周卷积结果的前 $N+M-1$ 点等于原两序列的线性卷积。

6. 序列的相关性

1）N 点圆周相关

任意给定两个有限长序列 $x(n)$、$y(n)$ 分别长 N_1、N_2，设 $N=\max[N_1,N_2]$，则它们的 N 点圆周相关为

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)y^*((n-m))_N R_N(m) \tag{3.1.17a}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}x((n+m))_N R_N(m)y^*(n) \tag{3.1.17b}$$

2）两序列的线性相关

$$r_{xy}(m)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n-m) \tag{3.1.18a}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)y^*(n)=r_{yx}^*(-m) \tag{3.1.18b}$$

由式(3.1.18a)和式(3.1.18b)可见，线性相关对序列的长度没有限定，且是对整个序列求和。

3）N 点圆周相关与线性相关的关系

当两个有限长序列 $x(n)$、$y(n)$ 分别长 N_1、N_2 时，将序列 $x(n)$、$y(n)$ 后补零成 N 长后

$(N \geqslant N_1+N_2-1)$，求出的 N 点圆周相关序列的前 N_1+N_2-1 点等于其线性相关。

7. 帕斯瓦尔定理

设有限长序列 $x(n)$、$y(n)$ 的 N 点 DFT 分别为 $X(k)$、$Y(k)$，则

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k) \tag{3.1.19}$$

式(3.3.19)左边是时域有限序列的能量 E，右边是序列的谱域能量和。该定理也称为“能量定理”。

8. 有限长序列及其 DFT 的奇偶性和对称性

1) 有限长共轭对称序列和共轭反对称序列

有限长共轭对称序列 $x_{ep}(n)$ 定义：

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{3.1.20a}$$

有限长共轭反对称序列 $x_{op}(n)$ 定义：

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{3.1.20b}$$

性质 3.1.1 任何有限长序列 $x(n)$ 均可分解为共轭对称分量和共轭反对称分量之和，即

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{3.1.21}$$

其中，分量可如式(3.1.22a)和式(3.1.22b)计算。

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + x^*(N-n)\right], \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{3.1.22a}$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) - x^*(N-n)\right], \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{3.1.22b}$$

2) DFT 的共轭对称性

可以证明，给定任意有限长复序列 $x(n)$，可以分解为纯实序列和纯虚序列分量之和；也可以分解为共轭对称序列和共轭反对称序列分量之和。若 $x(n)$ 的 N 点 DFT 记为 $X(k)$，则 DFT 的共轭对称性如图 3-2 所示。

$x(n)=x_r(n)+\mathrm{j}x_i(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$

DFT:

$X(k)=\mathrm{DFT}(x(n))=X_{ep}(k)+X_{op}(k)=X_R(k)+\mathrm{j}X_I(k)$

图 3-2 有限长序列的分解序列与其 DFT 序列的分解序列之间的对应关系

性质 3.1.2 设 $x(n)$ 是长度为 N 的实序列，则分解式 $x(n)=x_{ep}(n)+x_{op}(n)$，$0 \leqslant n \leqslant N-1$ 中 $x_{ep}(n)$、$x_{op}(n)$ 均为实序列，且分别为“中心”偶对称和“中心”奇对称的。若记 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$，则

(1) $X(k)=X^*(N-k)$，$0 \leqslant k \leqslant N-1$，DFT 是共轭对称序列；

(2) 如果 $x(n)=x(N-n)$，是“中心”实偶对称的，则 $X(k)=X(N-k)$，$0 \leqslant k \leqslant N-1$，是实偶对称序列；

(3) 如果 $x(n)=-x(N-n)$，是“中心”实奇对称的，则 $X(k)=-X(N-k)$，且 $X(k)=\mathrm{j}X_I(k)$，$0 \leqslant k \leqslant N-1$，是纯虚奇对称，其中 $X_I(k)$ 是实序列。

3.1.4 频域采样

1. 频域采样方法

在 z 平面单位圆上对 $X(z)$ 等间隔采样 N 点得到

$$\begin{aligned} X(k) &= X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k=0,1,\cdots,N-1 \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

即对 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单元圆上的 N 点等间隔采样，就是 $x(n)$ 的 N 点 DFT 序列 $X(k)$。

2. 频域采样定理

如果序列 $x(n)$ 的长度为 M，只有当对其 DTFT $X(e^{j\omega})$ 进行的频域采样点数 $N \geqslant M$ 时，才有

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X(k)] = x(n), \quad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{3.1.24}$$

即可由频域采样序列 $X(k)$ 无失真地恢复原序列 $x(n)$。

> **特别提示：** 根据 DFT 与 DFS 的关系，$X(k)$ 是 $x_N(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS $\tilde{X}(k)$ 的主值序列。$x_N(n)$ 是原序列 $x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓序列的主值序列。当 $N<M$ 时，$x(n)$ 以 N 为周期的周期延拓后，其主值序列 $x_N(n)$ 相对于 $x(n)$ 来讲，会产生时域混叠现象。

3. 频域恢复

满足频域采样定理时，用频域采样序列 $X(k)$ 可恢复原有限长序列 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$。

$$X(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi_k(z) \tag{3.1.25}$$

其中，$\varphi_k(z) = \dfrac{1}{N}\dfrac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$ 称为 z 域内插函数。

当 $z=e^{j\omega}$ 时，式(3.1.25)可具体为式(3.1.26a)：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\varphi\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right) \tag{3.1.26a}$$

其中，

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{N}\frac{\sin\dfrac{\omega N}{2}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}e^{-j\omega\left(\frac{N-1}{2}\right)} \tag{3.1.26b}$$

3.1.5 用 DFT 对连续时间信号进行谱分析

1. DFT 是对连续时间信号 FT 的近似

对连续时间带限信号 $x'(t)$ 应用 DFT 进行谱分析，涉及两方面的处理：一是要对 $x'(t)$ 采样，使之成为时间离散的序列；二是要截断，取得有限长信号。这两个处理导致用 DFT 对连续时间信号进行谱分析，是傅里叶变换分析的近似。

2. 频率分辨率

1）物理频率分辨率 Δf

设信号 $x(t)$时长为 T_L(单位为 s)，系统采样率为 f_s(单位为 Hz)，T_L 内可包含的采样点数 $L=T_L f_s$，则

$$\Delta f=\frac{1}{T_L}=\frac{f_s}{L} \tag{3.1.27}$$

由式(3.1.27)可见，物理频率分辨率 Δf 由待处理信号的总时长 T_L 确定，也是频谱分析能分辨的最小频率差。

2）计算频率分辨率 Δf_{bin}

若系统的采样率为 f_s，对截断得到的有限长采样序列 $x(n)$进行 N 点 DFT，则

$$\Delta f_{\text{bin}}(\text{Hz})=\frac{f_s}{N} \tag{3.1.28}$$

DFT 处理有限长连续时间信号 $x(t)$本质之一是用数字频率的频谱序列值 $X(k)$近似原信号的连续频谱函数 $X(e^{j\omega})$。N 点 DFT 计算能反映的信号最小频率变化(频域采样间隔)为$\frac{f_s}{N}$或$\frac{2\pi}{N}$(单位为 rad)。

3）Δf 和 Δf_{bin}的比较

(1) Δf 是取决于实际有限长信号(采样)序列 $x(n)$的参数。时域序列一定，Δf 就是确定的。

(2) 截断所得 $x(n)$的固有频谱只能区分出原连续信号 $x'(t)$的频差大于或等于 Δf 的各频率分量。

(3) 若 $x'(t)$中的频率分量差小于 Δf，截断所得 $x(n)$的频谱，相对于 $x'(t)$的频谱，存在混叠效应。

3.1.6 用 DFT 对离散时间信号进行谱分析

1. 有限长序列 $x(n)$

有限长序列 $x(n)$的 DTFT 函数 $X(e^{j\omega})$可直接用 N 点 DFT 估计，给出有限数字频率点的信号谱特性。

2. 周期为 N 的序列$\tilde{x}(n)$

因周期为 N 的序列$\tilde{x}(n)$的频谱 $X(e^{j\omega})$数学形式上可记为

$$X(e^{j\omega})=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\widetilde{X}(k)\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right) \tag{3.1.29}$$

其中，周期序列$\tilde{x}(n)$的离散傅里叶级数(DFS)的系数为

$$\widetilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad k\in(-\infty,+\infty)\text{ 的整数}$$

1）如果截取的是周期序列$\tilde{x}(n)$的主值序列 $x(n)$

由截取的主值序列计算出的 N 点 DFT 序列 $X(k)$，正是周期序列的 DFS $\widetilde{X}(k)$的主值序列，$X(k)$可以表示周期序列$\tilde{x}(n)$的谱结构。

2）如果截取的是周期序列的 m 个周期，序列长 mN

由序列的 m 个周期样值计算出的$M=mN$ 点的 DFT $X_M(k)$与由主值序列算出的 N 点 DFT $X(k)$之间有如下关系：

$$X_M(k)=\begin{cases} mX\left(\dfrac{k}{m}\right), & \dfrac{k}{m}=\text{整数} \\ 0, & \dfrac{k}{m}\neq\text{整数} \end{cases},\quad k=0,1,2,\cdots,mN-1 \tag{3.1.30}$$

3）如果时域带限$\tilde{x}(n)$序列周期未知

先取较短的 M 点一段 $x_M(n)$，做 M 点的 DFT：

$$X_M(k)=\mathrm{DFT}[x_M(n)],\quad k=0,1,2,\cdots,M-1$$

再取 $2M$ 长的一段时域序列 $x_{2M}(n)$，计算 $2M$ 点的 DFT：

$$X_{2M}(k)=\mathrm{DFT}[x_{2M}(n)],\quad k=0,1,2,\cdots,2M-1$$

比较 $X_M(k)$、$X_{2M}(k)$，如果两者的主谱线差别满足谱分析误差要求，则可用 $X_M(k)$或$X_{2M}(k)$近似$\tilde{x}(n)$的频谱。否则，继续将截取长度加倍，直到连续两次的主谱线对应的频率误差满足误差要求。设最后截取的长度为 rM，则 $X_{rM}(k)$表示数字频率为 $\omega=\dfrac{2\pi}{rM}k$（单位为 rad），$k=0,1,2,\cdots,rM-1$ 处的信号谱线强度。

3.1.7　DFT 应用中的问题与参数选择

1. 混叠现象

1）产生机理

对连续信号 $x(t)$以采样频率 f_s 进行采样，所得采样序列 $x(n)$的频谱是原时间连续信号频谱以 f_s 为周期的周期延拓。设信号的最高频率为 f_h，若 $f_s<2f_h$，采样序列 $x(n)$的频谱相对于 $x(t)$的频谱，将会产生混叠失真。

2）避免混叠现象、保证处理要求的主要措施

可以令连续时间信号先经过一个截止频率为 f_h 的低通滤波器，以限定信号的最高频率为 f_h。然后在满足奈奎斯特定理应用条件下，对连续时间信号进行采样。

如果期望的物理频率分辨率参数 Δf 给定，对按奈奎斯特定理进行采样的序列 $x(n)$所截取的采样点数 N 必须满足

$$N=\frac{T_L}{T}\geqslant\frac{2f_h}{\Delta f} \tag{3.1.31}$$

2. 栅栏效应

1）产生机理

非周期信号 $x_a(t)$的频谱幅度函数$|X_a(jf)|$是连续的。把 $x_a(t)$的 N 点采样 $x(n)$进行 DFT 得到的频谱，幅度序列$|X_a(k)|$只能是连续频谱 $X_a(jf)$的幅度函数上的有限离散频点采样，如图 3-3 所示。

2）栅栏效应

通过 N 个有限离散频点的“缝隙”观察另一边的频谱 $X_a(jf)$。只有离散频点的“缝隙”处才看得见。两根谱线（“缝隙”）之间如有重要的频谱分量，将被错过，而检测不出。这种现象形象地称为“栅栏效应”。

3）克服的措施

在原记录序列后面补零，增加 DFT 的长度，即增加频域 $X_a(jf)$上的采样点数 N，改变

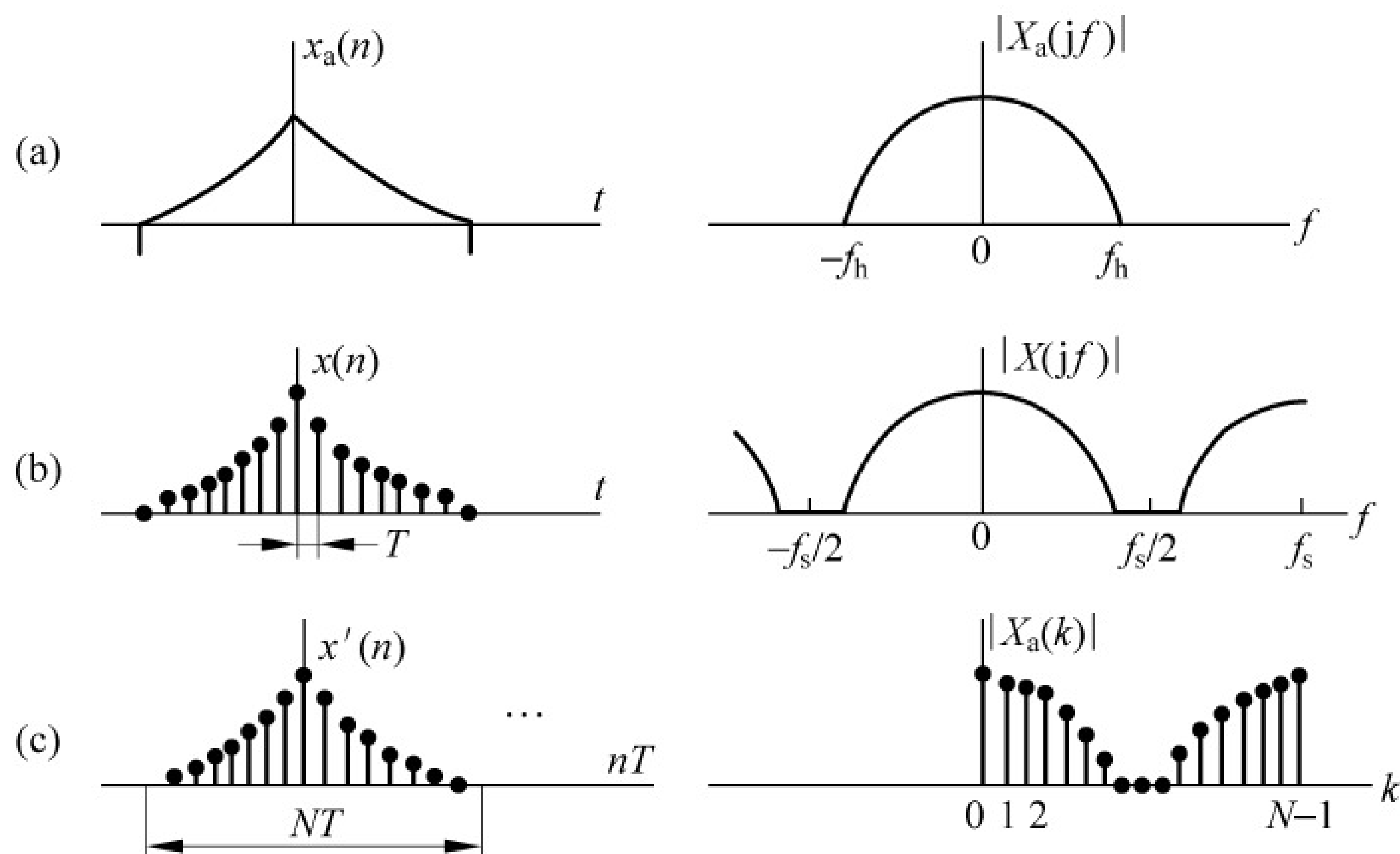


图 3-3 频域采样 $X(k)$的 IDFT，对应于时域序列 $x(n)$以 N 为周期延拓的主值序列 $x'(n)$

离散谱线（“栏栅缝隙”）的分布，就可能检测出原来看不到的频谱分量。但这样不能提高物理频率分辨率，即原先 $x(n)$的 DTFT 就不能区分的 $X_a(t)$的频率分量，仅对 $x(x)$后补零仍然不能分开。

3. 频率泄漏

1）频率泄漏现象

连续时间信号 $x(t)$经系统处理后，所得的频谱在原来没有频谱的频率区间出现了频谱。

2）产生机理

实际处理信号序列 $x(n)$时，根据需要常要对其截短。等效于长的数据序列乘以长为 N 的时间窗函数 $w(n)$。截短序列的频谱等于 $x(n)$的频谱 $X(e^{j\omega})$与 $w(n)$的谱函数 $W(e^{j\omega})$进行卷积。这使 $x(n)$截短后的频谱不同于它原未截短的频谱，产生了原信号中没有的频率分量，从频谱上看，截短序列的谱扩散到原来没有频谱的区间，即频率泄漏。

这种频率泄漏，有时还会产生不同频率分量间的干扰，即频率“混叠现象”。

3）克服的措施

选用窗谱旁瓣小、主瓣窄，即频率“泄漏”小的窗函数。

3.2 习题解答

3-1 计算下列信号的傅里叶变换在$[0,2\pi]$上的 N 点均匀采样值。

（1）$a\cos(\omega_0 n)R_N(n)$；

（2）$a^n R_N(n)$；

（3）$n^2 R_N(n)$；

（4）$a^{|n|}\sin\left(\frac{2\pi}{N}k_0 n\right)u(n)$，$|a|<1$；

（5）$\left(\frac{1}{2}\right)^n(u(n+3)-u(n-2))$；

（6）$n(u(n+N)-u(n-N-1))$；

(7) $\cos\left(\frac{18\pi n}{7}\right)+\sin(2n)$；

(8) $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\delta(n-3k)$；

(9) $x(n)=\begin{cases}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right), & -1\leqslant n\leqslant 4\\ 0, & 其他\end{cases}$。

解：对信号 $x(n)$，根据 DTFT 定义，$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$ 为周期函数。

在$[0,2\pi]$上的 N 点均匀采样值 $X(k)=X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k})$，其中 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$。

(1) 因所给信号仅在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 上定义，DTFT 的定义式可简化，并直接把采样频率 ω_k代入，得

$$
\begin{aligned}
X(k)&=\sum_{n=0}^{N-1}a\cos(\omega_0 n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}\\
&=\frac{1}{2}a\left[\sum_{n=0}^{N-1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}\right]\\
&=\frac{1}{2}a\left[\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0\right)n}+\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0\right)n}\right]\\
&=\frac{1}{2}a\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0\right)}}+\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 N}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0\right)}}\right]\\
&=\frac{1}{2}a\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0\right)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0\right)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0\right)}\right)}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0\right)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0\right)}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0\right)}\right)}\right]\\
&=\frac{1}{2}a\left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 N}{2}\right)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k+\omega_0\right)}\sin\left(\frac{k\pi}{N}+\frac{\omega_0}{2}\right)}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\omega_0 N}{2}}\sin\left(\frac{\omega_0 N}{2}\right)}{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{N}k-\omega_0\right)}\sin\left(\frac{k\pi}{N}-\frac{\omega_0}{2}\right)}\right],\quad k=0,1,\cdots,N-1
\end{aligned}
$$

(2) 所给信号仅在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 上定义，DTFT 的定义式可简化，并直接把采样频率 ω_k 代入，得

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}a^n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1-a^N}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

(3) 所给信号仅在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 上定义，DTFT 的定义式在采样频率 ω_k处的计算等效于该序列的 DFT，可简化：

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}n^2W_N^{nk}$$

令 $x_1(n)=nR_N(n)$，$x_1(n)$的 N 点 DFT 为

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{nk}=\sum_{n=1}^{N-1}nW_N^{nk} \qquad ①$$

$$W_N^kX_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{(n+1)k}=\sum_{n=1}^{N-1}nW_N^{(n+1)k} \qquad ②$$

式①－式②，得

$$X_1(k)(1-W_N^k)=[W_N^k+2W_N^{2k}+3W_N^{3k}+\cdots+(N-1)W_N^{(N-1)k}]-[W_N^{2k}+2W_N^{3k}+\cdots+(N-2)W_N^{(N-1)k}+(N-1)]$$

其中用到 $W_N^{Nk}=1$，合并同类项：

$$\begin{aligned}X_1(k)(1-W_N^k)&=W_N^k+W_N^{2k}+W_N^{3k}+\cdots+W_N^{(N-1)k}-(N-1)\\&=\frac{W_N^k-1}{1-W_N^k}-(N-1)\\&=-N,\quad k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}$$

故

$$X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}nW_N^{nk}=\frac{-N}{1-W_N^k},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

对 $x(n)=n^2R_N(n)$，设其 N 点 DFT 记为 $X(k)$，类似地，有

$$\begin{aligned}X(k)(1-W_N^k)&=\sum_{n=0}^{N-1}n^2W_N^{nk}-\sum_{n=0}^{N-1}n^2W_N^{(n+1)k}\\&=W_N^k+4W_N^{2k}+9W_N^{3k}+\cdots+(N-1)^2W_N^{(N-1)k}-[W_N^{2k}+4W_N^{3k}+9W_N^{4k}+\cdots+\\&\quad(N-2)^2W_N^{(N-1)k}+(N-1)^2]\\&=-(N-1)^2+\sum_{n=1}^{N-1}(2n-1)W_N^{nk}\\&=-N(N-2)+2\sum_{n=1}^{N-1}nW_N^{nk}\\&=-N(N-2)+2X_1(k)\\&=-N(N-2)-\frac{2N}{1-W_N^k}\end{aligned}$$

所以

$$X(k)=\frac{N(N-2)W_N^k-N^2}{(1-W_N^k)^2},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

(4) 依题意，$x(n)$ 仅当 $n\geqslant 0$ 时有非零序列值，故直接把采样频率 ω_k 代入 DTFT 定义式，得

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{|n|}\sin\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right)u(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\sin\left(\frac{2\pi}{N}k_0n\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}\\&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{2\pi}{N}k_0\right)}}-\frac{1}{1-a\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{2\pi}{N}k_0\right)}}\right]\\&=\frac{1}{2\mathrm{j}}\left[\frac{a\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k_0}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k_0}\right)}{1-a\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k_0}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k_0}\right)+a^2\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{N}k}}\right]\end{aligned}$$

$$X(k)=\frac{a\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\sin\left(\frac{2\pi}{N}k_0\right)}{1-2a\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}\cos\left(\frac{2\pi}{N}k_0\right)+a^2\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{4\pi}{N}k}},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

(5) 因有限长非因果序列是绝对可和的，故其 DTFT 是存在的，可按 DTFT 的定义计

算。在$[0,2\pi]$上对 DTFT 的 N 点等间隔采样谱 $X(k)$就是 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ 频点处 DTFT $X(e^{j\omega})$的值。

方法 1：

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\{u[n+3]-u[n-2]\}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\\&=\sum_{n=-3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\\&=8\times\frac{e^{j3\frac{2\pi}{N}k}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}-\frac{1}{4}\times\frac{e^{-j2\frac{2\pi}{N}k}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\\&=8e^{j3\frac{2\pi}{N}k}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5e^{-j5\frac{2\pi}{N}k}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\right]\\&=8e^{j3\frac{2\pi}{N}k}\left[1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}+\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^2+\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^3+\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^4\right]\\&=8e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 3k}+4e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2k}+2e^{j\frac{2\pi}{N}k}+1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\end{aligned}$$

方法 2：因阶跃序列 $u(n+3)$的定义区间：$n+3\geqslant 0, n\geqslant -3$；阶跃序列 $u(n-2)$的定义区间：$n-2\geqslant 0, n\geqslant 2$；依题意，所给指数序列 $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 的取值区间为$-3\leqslant n\leqslant 1$，因此其 DTFT 在$[0,2\pi]$上的 N 点等间隔采样计算简化为

$$X(k)=\sum_{n=-3}^{1}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=-3}^{1}\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^n$$

根据等比级数求和公式，有

$$\begin{aligned}X(k)&=\frac{\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^{-3}-\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\cdot\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\\&=8e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 3k}\frac{1-\left(\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}\right)^5}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}\end{aligned}$$

因 $1-x^5=(1-x)(x^4+x^3+x^2+x+1)$，则

$$X(k)=\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}+1+2e^{j\frac{2\pi}{N}k}+4e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2k}+8e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 3k}$$

(6) 依题意，$-N\leqslant n\leqslant N$，信号非零，则

$$\begin{aligned}X(k)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\{u[n+N]-u[n-N-1]\}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\\&=\sum_{n=-N}^{N}n\,e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{m=0}^{2N}(m-N)e^{-j\frac{2\pi}{N}k(m-N)}\end{aligned}$$

$$=\sum_{m=0}^{2N}(m-N)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}$$

方法 1：根据几何级数公式

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a+kd)q^k=\frac{a-[a+(n-1)d]q^n}{1-q}+\frac{dq(1-q^{n-1})}{(1-q)^2}$$

代入 $a=-N,d=1,n-1=2N,q=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}$，可求得

$$X(k)=\frac{-N-[-N+2N]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k(2N+1)}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}+\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}[1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k(2N)}]}{(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k})^2}$$

考虑到，k 为整数，有 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k}=1$，则

$$X(k)=\frac{-N-N\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}=-N\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$=\mathrm{j}N\frac{\cos\left(\frac{\pi}{N}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

方法 2：参考本题第(3)题的求解思路，得

$$X(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\{u[n+N]-u[n-N-1]\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\sum_{n=-N}^{-1}n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}+\sum_{n=1}^{N}n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=X'(k)+X''(k)$$

因为

$$X'(k)=\sum_{n=-N}^{-1}n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{-N}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}},\quad X''(k)=\sum_{n=1}^{N}n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{-N\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}$$

所以

$$X(k)=-N\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}=\mathrm{j}N\frac{\cos\left(\frac{\pi}{N}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

方法 3：也可以参考本题第(3)题的求解思路，按

$$X(k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}n\{u[n+N]-u[n-N-1]\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$=\sum_{m=0}^{2N}(m-N)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}=\sum_{m=0}^{2N}m\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}-N\sum_{m=0}^{2N}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}$$

$$=X_1(k)-NX_2(k)$$

求解。其中，

$$X_1(k)=\sum_{m=0}^{2N}m\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}km}=\frac{-2N\cdot\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}}$$

而

$$X_2(k)=\sum_{m=0}^{2N}e^{-j\frac{2\pi}{N}km}=\frac{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}e^{-j\frac{2\pi}{N}k\cdot 2N}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=1$$

故

$$X(k)=\sum_{m=0}^{2N}me^{-j\frac{2\pi}{N}km}-N\sum_{m=0}^{2N}e^{-j\frac{2\pi}{N}km}=\frac{-2N\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}-N$$

$$=-N\frac{1+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}=jN\frac{\cos\left(\frac{\pi}{N}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

(7) 方法 1：依题意，$\cos\left(\frac{18\pi}{7}n\right)$和 $\sin(2n)$的理想傅里叶变换为线谱，形式上可用频域冲激函数表达，设分别为 $X_1(e^{j\omega})$和 $X_2(e^{j\omega})$，且

$$X_1(e^{j\omega})=\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left[\delta\left(\omega-\frac{18\pi}{7}-2m\pi\right)+\delta\left(\omega+\frac{18\pi}{7}-2m\pi\right)\right]\quad ①$$

$$X_2(e^{j\omega})=\frac{\pi}{j}\sum_{m=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega-2-2m\pi)-\delta(\omega+2-2m\pi)]\quad ②$$

由式①可见，在 $\cos\left(\frac{18\pi}{7}n\right)$的两根线谱以 2π 为周期无穷延拓($-\infty<m<\infty$)的过程中，当 $m=-1$ 时，对应谱线$+\frac{18\pi}{7}+2m\pi=+\frac{18\pi}{7}-2\pi=\frac{4\pi}{7}$，在$[0,2\pi]$范围内；当 $m=2$ 时，对应谱线$-\frac{18\pi}{7}+2m\pi=-\frac{18\pi}{7}+4\pi=\frac{10\pi}{7}$，在$[0,2\pi]$范围内；其他延拓周期的谱线均不在要求的数字频率范围内。

由式②可见，在 $\sin(2n)$两根线谱以 2π 为周期无穷延拓($-\infty<m<\infty$)的过程中，当 $m=0$ 时，对应谱线$+2+2m\pi=+2$，小于 2π，在$[0,2\pi]$范围内；当 $m=1$ 时，对应谱线$-2+2m\pi=-2+2\pi$，小于 2π，在$[0,2\pi]$范围内；其他延拓周期的谱线均不在要求的数字频率范围内。

综合起来，在要求的$[0,2\pi]$数字频率范围内，信号的频谱形式上有

$$X(e^{j\omega})=X_1(e^{j\omega})+X_2(e^{j\omega})$$

$$=\pi\left[\delta\left(\omega-\frac{18\pi}{7}+2\pi\right)+\delta\left(\omega+\frac{18\pi}{7}-4\pi\right)\right]+\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-2)-\delta(\omega+2-2\pi)]\quad ③$$

所以，在$[0,2\pi]$上的 N 点均匀采样值，用 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ 代替③中的 ω，得

$$X(k)=X_1(k)+X_2(k)=X_1(e^{j\omega_k})+X_2(e^{j\omega_k})$$

$$=\pi\left\{\delta\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{18\pi}{7}+2\pi\right)+\delta\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{18\pi}{7}-4\pi\right)-\right.$$

$$\left.j\delta\left(\frac{2\pi}{N}k-2\right)+j\delta\left(\frac{2\pi}{N}k+2-2\pi\right)\right\}$$

显然，取合适的 N 值，才可能有整数 k 指示的谱线，能近似反映所给信号的频谱谱线的频域采样结果。

方法 2：如果用欧拉公式，把正弦函数、余弦函数表示为复指数序列，则其 DTFT 可以

按定义进行级数求和。得到简化的所给信号的 $X(e^{j\omega})$ 理论公式后，再计算 $[0,2\pi]$ 上的 N 点均匀采样值结果 $X(e^{j\omega_k})$，其中 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$。

请读者自己用方法 2 计算，与方法 1 的结果对比。并讨论两方法异同的可能解释。

(8) 为了与信号中的参数 k 区别开，N 个采样点序号用 m 指示，$0\leqslant m\leqslant N-1$，所给信号的 DTFT 的采样序列为

$$
\begin{aligned}
X(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n\delta[n-3k]e^{-jn\frac{2\pi}{N}m} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{3k}e^{-j3k\frac{2\pi}{N}m} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{N}m}\right)^{3k} \\
&= \frac{1}{1-\left(\frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{N}m}\right)^3}, \quad m=0,1,2,\cdots,N-1
\end{aligned}
$$

(9) 依题意，$-1\leqslant n\leqslant 4$，信号非零，其 DTFT 在 $[0,2\pi]$ 上的 N 点均匀采样值，用 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ 代替 $X(e^{j\omega})$ 中的 ω，得

$$
\begin{aligned}
X(k) &= \sum_{n=-1}^{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} \\
&= \sum_{n=-1}^{4}\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{\pi}{3}n}+e^{-j\frac{\pi}{3}n}\right)e^{-jn\frac{2\pi}{N}k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=-1}^{4}\left[e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{3}\right)n}+e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{3}\right)n}\right]
\end{aligned}
$$

根据等比级数求和公式并考虑到 k 为整数，有 $e^{j2\pi k}=1$，则

$$
X(k)=\frac{1}{2}\left[\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{3}\right)}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{3}\right)}\cdot e^{-j4\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{3}\right)}}{1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{3}\right)}}+\frac{e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{3}\right)}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{3}\right)}\cdot e^{-j4\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{3}\right)}}{1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{3}\right)}}\right]
$$

整理，得

$$
\begin{aligned}
X(k) = &\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{3}\right)}\left[\frac{1-e^{-j6\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}}{1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{3}\right)}}\right]+ \\
&\frac{1}{2}e^{j\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{3}\right)}\left[\frac{1-e^{-j6\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}}{1-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}k+\frac{\pi}{3}\right)}}\right], \quad k=0,1,2,\cdots,N-1
\end{aligned}
$$

3-2 根据下列离散时间信号傅里叶变换的 N 点离散采样值，确定各相应的离散时间域信号。

(1) $X(k)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\left|\frac{2\pi}{N}k\right|<\omega \\ 1, & \omega\leqslant\left|\frac{2\pi}{N}k\right|\leqslant\pi\end{cases}$；

(2) $X(k)=1-2e^{-j3\frac{2\pi}{N}k}+4e^{j2\frac{2\pi}{N}k}+3e^{-j6\frac{2\pi}{N}k}$；

(3) $X(k)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\delta\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{2}m\right)$；

(4) $X(k)=\cos^2\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$；

(5) $X(k)=\cos\left(\frac{\pi k}{N}\right)+j\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$，$-\pi\leqslant\frac{2\pi}{N}k\leqslant\pi$；

(6) $X(k)=\dfrac{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}-\frac{1}{6}e^{-j2\frac{2\pi}{N}k}}$。

解：根据题目，仅知道各序列的傅里叶变换存在，且知道部分频域采样值，但是并不知道各时域序列是否是有限长，因此也不确定各小题对序列频谱的 N 点采样是否满足频域采样定理。因此本题求离散时间域序列，更严格的应该从 IDTFT 入手，即

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\,e^{j\omega n}\,d\omega$$

但仅已知 $\omega_k=\dfrac{2\pi}{N}k$ 处的 $X(e^{j\omega})$ 值。

(1) 方法 1：依题意，IDTFT 定义式中被积函数仅在积分变量 $\omega\leqslant|\omega'|\leqslant\pi$ 的范围内非零。故 IDTFT 定义具体为

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\omega}e^{j\omega' n}\,d\omega'+\int_{\omega}^{\pi}e^{j\omega' n}\,d\omega'\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}\left(e^{j\omega' n}\Big|_{-\pi}^{-\omega}+e^{j\omega' n}\Big|_{\omega}^{\pi}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}\left(e^{-j\omega n}-e^{-j\pi n}+e^{j\pi n}-e^{j\omega n}\right)\\&=\frac{1}{\pi n}[\sin(\pi n)-\sin(\omega n)]=\delta(n)-\frac{\sin(\omega n)}{\pi n},\quad n=0,1,2,\cdots\end{aligned}$$

注意：

① 若所给序列理解为数字系统的单位采样脉冲响应的频谱采样，则系统一定是理想数字高通滤波器。而本题得到 $x(n)$ 也可解释成理想数字高通滤波器的时域“单位采样脉冲响应”。

② 可以证明，$h(n)\equiv\dfrac{\sin(\omega n)}{\pi n}$ 可看成是截止频率为 ω 的理想数字低通滤波器的时域“单位采样脉冲响应”。

方法 2：如果考虑所给序列是长为 N 的时域序列，题目可看成是该有限长序列的 DFT。依 DFT 隐含的 N 点周期性，已知条件等效为

$$X(k)=\begin{cases}0, & 0\leqslant|k|<\omega\dfrac{N}{2\pi}\\1, & \omega\dfrac{N}{2\pi}\leqslant|k|\leqslant\dfrac{N}{2}\end{cases}$$

按 IDFT 的定义，有

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\left(\sum_{k=-\frac{N}{2}}^{-\frac{N}{2\pi}\omega}e^{j\frac{2\pi}{N}nk}+\sum_{k=\frac{N}{2\pi}\omega}^{\frac{N}{2}}e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right)$$

理论上，k 应该取 N 个整数，但参数 ω 不定，所以形式上按等比级数求和可得

$$\begin{aligned}x(n)&=\frac{1}{N}\left\{\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n\left(-\frac{N}{2}\right)}-e^{j\frac{2\pi}{N}n}e^{j\frac{2\pi}{N}n\left(-\frac{N}{2\pi}\omega\right)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}n}}+\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}n\left(\frac{N}{2\pi}\omega\right)}-e^{j\frac{2\pi}{N}n}e^{j\frac{2\pi}{N}n\left(\frac{N}{2}\right)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}n}}\right\}\\&=\frac{e^{j\frac{\pi}{N}n}}{N\left(1-e^{j\frac{2\pi}{N}n}\right)}\left\{e^{-j\pi n\left(1+\frac{1}{N}\right)}-e^{-jn\left(\omega-\frac{\pi}{N}\right)}+e^{jn\left(\omega-\frac{\pi}{N}\right)}-e^{j\pi n\left(1+\frac{1}{N}\right)}\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{N\sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)}\left\{\sin\left[\left(1+\frac{1}{N}\right)\pi n\right]-\sin\left[\left(\omega-\frac{\pi}{N}\right)n\right]\right\},\quad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

方法 3：如果考虑所给序列是长为 N 的时域序列，题目可看成是该有限长序列的 DFT。依 DFT 隐含的 N 点周期性，已知条件等效为

$$X(k)=\begin{cases}0, & 0\leqslant|k|<\omega\dfrac{N}{2\pi}\\[2mm] 1, & \omega\dfrac{N}{2\pi}\leqslant|k|\leqslant\dfrac{N}{2}\end{cases}$$

$$X(k)=\begin{cases}0, & 0\leqslant k<N\dfrac{\omega}{2\pi},\quad N\left(1-\dfrac{\omega}{2\pi}\right)<k\leqslant N-1\\[2mm] 1, & N\dfrac{\omega}{2\pi}\leqslant k\leqslant N\left(1-\dfrac{\omega}{2\pi}\right)\end{cases}$$

按 IDFT 的定义，形式上按等比级数求和可得

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=\omega\frac{N}{2\pi}}^{N-\omega\frac{N}{2\pi}}X(k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n\cdot\omega\frac{N}{2\pi}}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n\left(N-\omega\frac{N}{2\pi}\right)}}{N\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}n}\right)}=\frac{\sin\left[\left(\omega-\frac{\pi}{N}\right)n\right]}{-N\sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)},\quad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

思考：方法 2、方法 3 的结果和方法 1 的结果形式上不同。请讨论三种方法的差异，理解 IDTFT 和 IDFT 的异同。

（2）根据 DTFT 的定义，有

$$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

依题已知 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ 处的频谱

$$X(k)=1-2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}3\frac{2\pi}{N}k}+4\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\frac{2\pi}{N}k}+3\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\frac{2\pi}{N}k}$$

仅为有限项，故与 DTFT 的定义式比较可得

$$x(n)=\delta(n)-2\delta(n-3)+4\delta(n+2)+3\delta(n-6)$$

（3）方法 1：根据 IDTFT 的定义，有

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$

已知 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ 处的 $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$ 值可等效写成

$$X(k)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\delta\left(\frac{2\pi}{N}k-\frac{\pi}{2}m\right)$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\delta\left(\omega_k-\frac{\pi}{2}m\right)$$

将已知谱序列代入 IDTFT 定义式：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m\delta\left(\omega_k-\frac{\pi}{2}m\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k n}\mathrm{d}\omega_k$$

考虑到积分只在[$-\pi,\pi$]范围上进行,再根据$\delta(n)$的采样特性,则

$$-\pi \leqslant \omega_k = \frac{2\pi}{N}k = \frac{\pi}{2}m \leqslant \pi, \quad -\frac{N}{2} \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}, \quad -2 \leqslant m \leqslant 2$$

所以

$$\begin{aligned} x(n) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-2}^{2}(-1)^m\int_{-\pi}^{\pi}\delta\left(\omega_k - \frac{\pi}{2}m\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k n}\mathrm{d}\omega_k \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-2}^{2}(-1)^m\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}m} = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-2}^{2}(-\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}})^m \\ &= \frac{1}{2\pi}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi n} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}n} + 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}n} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n}] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\times(-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

方法 2:题目给出信号的谱为无穷多的线谱,只有周期序列$\tilde{x}(n)$的谱才是无穷多的线谱。设拟求时域信号是周期为N的序列,则根据DFS、IDFS定义,该时域信号可展开成离散傅里叶级数$\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$($m=0,1,2,\cdots,N-1$)的线性组合,即

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{N-1}a_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

周期序列不是绝对可和的,借助不可实现的冲激函数(δ-函数),其DTFT在离散频点$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$处的值可记为$X(k)$,形式上有如下表达式:

$$\tilde{x}(n) = \sum_{m=0}^{N-1}a_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \leftrightarrow X(k) = 2\pi\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m\delta\left(\omega_k - \frac{2\pi}{N}m\right)$$

而已知

$$X(k) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m\delta\left(\frac{2\pi}{N}k - \frac{\pi}{2}m\right)$$

可见

$$2\pi\, a_m = (-1)^m, \quad \frac{2\pi}{N} = \frac{\pi}{2}$$

即

$$a_m = \frac{(-1)^m}{2\pi}, \quad N = 4$$

因此

$$\begin{aligned} \tilde{x}(n) &= \sum_{m=0}^{N-1}a_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} = \sum_{m=0}^{4-1}\frac{(-1)^m}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\left(\frac{2\pi}{4}\right)n} = \sum_{m=0}^{3}\frac{(-1)^m}{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\left(\frac{\pi}{2}\right)n} \\ &= \frac{1}{2\pi}[1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}n} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi n} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(3\frac{\pi}{2}n - 2\pi\right)}] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

思考：方法 2 和方法 1 的结果形式上不同，请比较分析可能的原因。

(4) $X(k)=\cos^2\frac{2\pi}{N}k=\frac{1+\cos 2\frac{2\pi}{N}k}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{j2\frac{2\pi}{N}k}+\frac{1}{4}e^{-j2\frac{2\pi}{N}k}$

$$\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega_k n},\quad \omega_k=\frac{2\pi}{N}k$$

因此

$$x(n)=\frac{1}{2}\delta(n)+\frac{1}{4}\delta(n+2)+\frac{1}{4}\delta(n-2)$$

(5) $x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{N}k\right)+j\sin\frac{2\pi}{N}k\right)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\,d\frac{2\pi}{N}k$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{N}k}+e^{-j\frac{\pi}{N}k})+\frac{1}{2}(e^{j\frac{2\pi}{N}k}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k})\right]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\,d\frac{2\pi}{N}k$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[e^{j\left(\frac{1}{2}+n\right)\frac{2\pi}{N}k}+e^{j\left(-\frac{1}{2}+n\right)\frac{2\pi}{N}k}+e^{j(1+n)\frac{2\pi}{N}k}-e^{j(n-1)\frac{2\pi}{N}k}]\,d\frac{2\pi}{N}k$$

$$=\frac{1}{4\pi j}\left\{\frac{1}{n+\frac{1}{2}}[e^{j\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}-e^{-j\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi}]+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}[e^{j\left(-\frac{1}{2}+n\right)\pi}-e^{-j\left(-\frac{1}{2}+n\right)\pi}]+\right.$$

$$\left.\frac{1}{n+1}[e^{j(1+n)\pi}-e^{-j(1+n)\pi}]-\frac{1}{n-1}[e^{j(n-1)\pi}-e^{-j(n-1)\pi}]\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi j}\left[\frac{2j}{n+\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi+\frac{2j}{n-\frac{1}{2}}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+\right.$$

$$\left.\frac{2j}{n+1}\sin(1+n)\pi-\frac{2j}{n-1}\sin(n-1)\pi\right]$$

$$=\frac{-(-1)^n}{2\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}+\frac{1}{2}\delta(n+1)-\frac{1}{2}\delta(n-1)$$

(6) $$X(k)=\frac{e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{1+\frac{1}{6}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}-\frac{1}{6}e^{-j2\frac{2\pi}{N}k}}=\frac{-6e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}{(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}-3)(e^{-j\frac{2\pi}{N}k}+2)}$$

$$=\frac{\frac{6}{5}}{1-\frac{1}{3}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}-\frac{\frac{6}{5}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

因此

$$x(n)=\frac{6}{5}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

3-3 已知下列 N 点 DFT $X(k)$，求 $x(n)=\text{IDFT}[X(k)]$。

(1) $X(k)=\begin{cases}\dfrac{N}{2}e^{j\theta}, & k=m\\ \dfrac{N}{2}e^{-j\theta}, & k=N-m\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(2) $X(k)=\begin{cases}-j\dfrac{N}{2}e^{j\theta}, & k=m\\ j\dfrac{N}{2}e^{-j\theta}, & k=N-m\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

其中,m 为正整数,$0<m<\dfrac{N}{2}$,N 为变换区间长度。

解:

(1) $x(n)=\text{IDFT}[X(k)]=\dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn}$

$$=\frac{1}{N}\left[\frac{N}{2}e^{j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}mn}+\frac{N}{2}e^{-j\theta}e^{j\frac{2\pi}{N}(N-m)n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)}+e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)}\right]$$

$$=\cos\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right),\quad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

(2) $x(n)=\dfrac{1}{N}\left[-\dfrac{N}{2}je^{j\theta}W_N^{-mn}+\dfrac{N}{2}je^{-j\theta}W_N^{-(N-m)n}\right]$

$$=\frac{1}{2j}\left\{e^{j\theta}e^{-j\frac{2\pi}{N}(-mn)}-e^{-j\theta}e^{-j\frac{2\pi}{N}[-(N-m)n]}\right\}$$

$$=\frac{1}{2j}\left[e^{j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)}-e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)}\right]$$

$$=\sin\left(\frac{2\pi}{N}mn+\theta\right)\quad n=0,1,2,\cdots,N-1$$

3-4 有序列

$$x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

(1) 求 $x(n)$的 4 点 DFT。

(2) 若 $y(n)$是 $x(n)$与它本身的 4 点循环卷积,求 $y(n)$及其 4 点 DFT $Y(k)$。

(3) 若 $h(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+2\delta(n-3)$,求 $x(n)$与 $h(n)$的 4 点循环卷积。

解:

(1) $x(n)$的 4 点 DFT 为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{nk}=1+2W_4^{2k}+W_4^{3k}$$

其中,$W_4=e^{-j\frac{2\pi}{4}}$,$k=0,1,2,3$。具体计算得

k	0	1	2	3
$X(k)$	4	$-1+\mathrm{j}$	2	$-1-\mathrm{j}$

(2) $y(n)=x(n)④x(n)$，则根据卷积定理，有

$$Y(k)=X^2(k)$$

$$Y(k)=(1+2W_4^{2k}+W_4^{3k})^2=1+4W_4^{2k}+2W_4^{3k}+4W_4^{4k}+4W_4^{5k}+W_4^{6k}$$

因为

$$W_4^{4k}=1,\quad W_4^{5k}=W_4^{k},\quad W_4^{6k}=W_4^{2k}$$

$Y(k)$的表达式可简化为

$$Y(k)=5+4W_4^{k}+5W_4^{2k}+2W_4^{3k}$$

所以

$$\begin{aligned}y(n)&=x(n)④x(n)\\&=5\delta(n)+4\delta(n-1)+5\delta(n-2)+2\delta(n-3)\end{aligned}$$

(3) 方法 1：

$$h(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+2\delta(n-3)$$

$x(n)$与$h(n)$的 4 点循环卷积用表格法求解。$x(n)$与$h(n)$的线性卷积为

$$y(n)=x(n)*h(n)=\{1,1,2,5,1,4,2\}$$

计算可得

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y(n)$	1	1	2	5	1	4	2	0	0
$y(n+4)$	1	4	2	0	0	0	0	0	0
$z(n)$	2	5	4	5	—	—	—	—	—

$$z(n)=x(n)④h(n)=\{2,5,4,5\}$$

或

$$z(n)=2\delta(n)+5\delta(n-1)+4\delta(n-2)+5\delta(n-3)$$

方法 2：依题意，$h(n)$的 4 点 DFT 为

$$H(k)=\sum_{n=0}^{3}h(n)W_4^{nk}=1+W_4^{k}+2W_4^{3k}$$

而$x(n)$的 4 点 DFT 为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{3}x(n)W_4^{nk}=1+2W_4^{2k}+W_4^{3k}$$

令，$z(n)=x(n)④h(n)$，根据时域卷积定理，$z(n)$的 4 点 DFT 为

$$\begin{aligned}Z(k)&=X(k)H(k)=(1+2W_4^{2k}+W_4^{3k})(1+W_4^{k}+2W_4^{3k})\\&=2+5W_4^{k}+4W_4^{2k}+5W_4^{3k}\end{aligned}$$

所以

$$z(n)=x(n)④h(n)=2\delta(n)+5\delta(n-1)+4\delta(n-2)+5\delta(n-3)$$

3-5 设 $X(k)$表示 N 点序列 $x(n)$的 N 点离散傅里叶变换，$X(k)$本身也是一个 N 点序列。如果计算 $X(k)$的离散傅里叶变换得到一序列 $x_1(n)$，试用 $x(n)$表示 $x_1(n)$。

解：令 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，根据 N 点 DFT 的定义：

$$\begin{aligned} x_1(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{nk} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{n'=0}^{N-1} x(n') W_N^{kn'} \right] W_N^{nk} \\ &= \sum_{n'=0}^{N-1} x(n') \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(n+n')}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_N^{k(n+n')} = \begin{cases} N, & n+n' = Nl \\ 0, & \text{其他}(n+n') \end{cases}, \quad l \text{ 为任意整数}$$

所以，$x_1(n)$中关于 k 的求和部分，仅当 $n' = -n + Nl$ 时，有非零值 N；再考虑 $x(n)$，仅在 $[0, N-1]$上有定义，关于 n'的求和部分综合得 $0 \leqslant n' = -n+Nl \leqslant N-1$ 且 $0 \leqslant n \leqslant N-1$，表明关于 n'的求和，对固定的 n、N，等效于对 $l=0,1$ 求和：

$$x_1(n) = N \cdot \sum_{l=0}^{1} x(-n+Nl)$$

该对 l 的求和形式上等效于有限长序列的 N 周期延拓，应用主值序列与周期延拓序列的数学表达关系，故有

$$x_1(n) = N \cdot \sum_{l=0}^{1} x(-n+Nl) = N \cdot x((-n))_N R_N(n)$$

3-6 设有两个序列

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leqslant n \leqslant 5 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leqslant n \leqslant 14 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

各作 15 点的 DFT，然后将两个 DFT 相乘，再求乘积的 IDFT，设所得的结果为 $f(n)$。问 $f(n)$的哪些点(用序号 n 表示)对应于 $x(n) * y(n)$应该得到的点。

解：序列 $x(n)$的点数为 $N_1=6$，$y(n)$的点数为 $N_2=15$，故 $x(n) * y(n)$的点数应为

$$N = N_1 + N_2 - 1 = 20$$

又依题意知，$f(n)$为 $x(n)$与 $y(n)$的 15 点的圆周卷积，即圆周卷积长 $L=15$。所以相对于 $x(n) * y(n)$结果，混叠点数为 $N-L=20-15=5$。即线性卷积的结果(20 点序列)以 15 为周期延拓形成 15 点圆周卷积序列 $f(n)$时，一个周期内在 $n=0$ 到 $n=4(=N-L-1)$这 5 点处发生混叠，即 $f(n)$中只有 $n=5$ 到 $n=14$ 的点对应于 $x(n) * y(n)$结果中的相应 n 序号处的值。

3-7 已知两个有限长序列为

$$x(n) = \begin{cases} n+1, & 0 \leqslant n \leqslant 3 \\ 0, & 4 \leqslant n \leqslant 6 \end{cases}$$

$$y(n)=\begin{cases}-1, & 0\leqslant n\leqslant 4\\ 1, & 5\leqslant n\leqslant 6\end{cases}$$

试用作图表示 $x(n)$，$y(n)$以及 $f(n)=x(n)⑦y(n)$。

解：利用圆周卷积公式求解，结果如图 3-4 所示。

$$f(n)=4\delta(n-1)-2\delta(n-2)-10\delta(n-3)-10\delta(n-4)-8\delta(n-5)-4\delta(n-6)$$

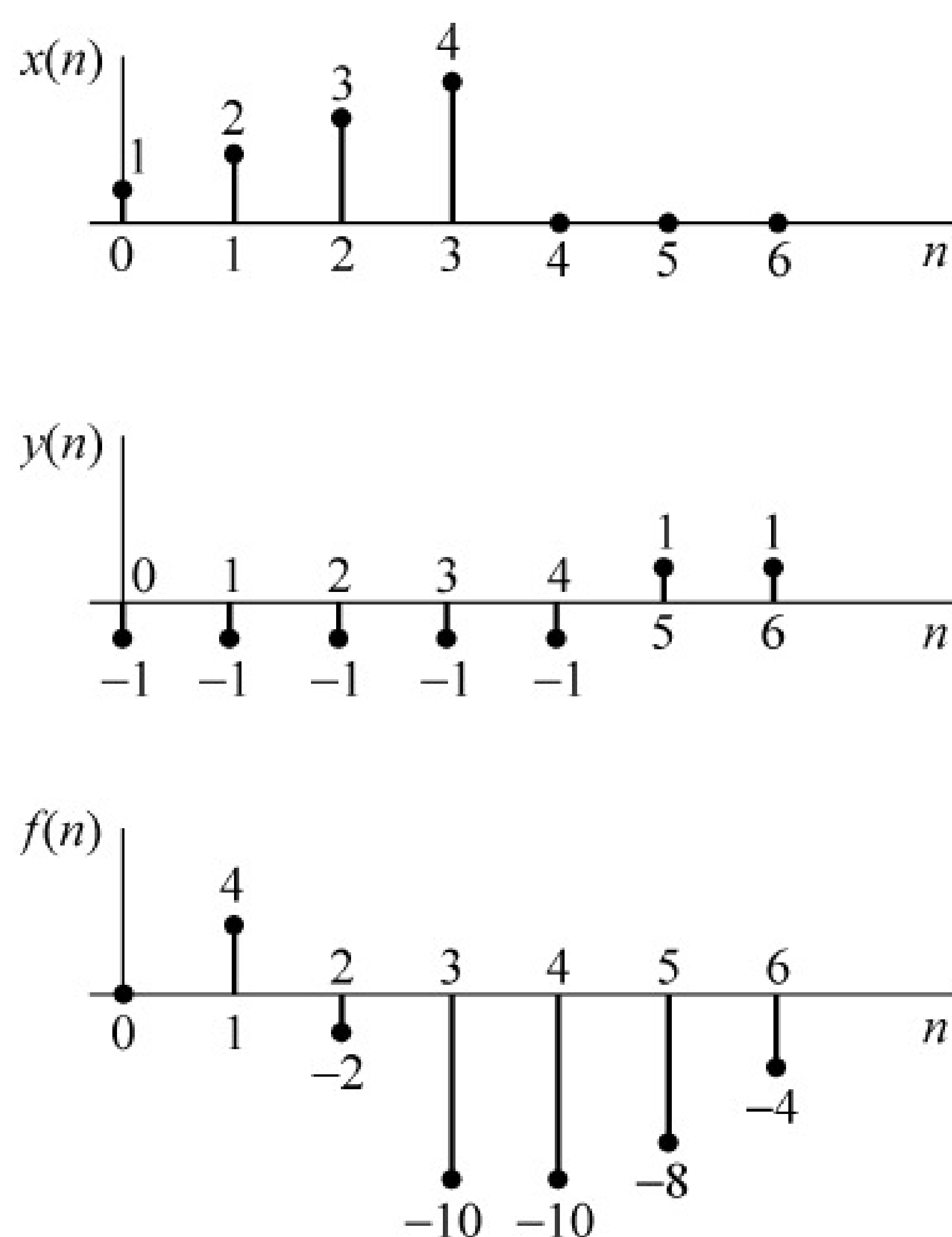


图 3-4 题 3-7 解图

3-8 已知 $x(n)$是 N 点的有限长序列，$X(k)=\text{DFT}[x(n)]$，现将 $x(n)$的每两点之间补进 $r-1$ 个零值点，得到一个 rN 点的有限长序列 $y(n)$

$$y(n)=\begin{cases}x\left(\dfrac{n}{r}\right), & n=ir,\quad i=0,1,2,\cdots,N-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求 rN 点的 $\text{DFT}[y(n)]=Y(k)$与 $X(k)$的关系。

解：由

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

可得

$$\begin{aligned}Y(k)=\text{DFT}[y(n)]&=\sum_{n=0}^{rN-1}y(n)W_{rN}^{nk}\\&=\sum_{i=0}^{N-1}x\left(\frac{ir}{r}\right)W_{rN}^{irk}=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik}\\&=X(k),\quad 0\leqslant k\leqslant rN-1\end{aligned}$$

根据 $y(n)$与 $x(n)$的关系，有

$$Y(k)=\sum_{i=0}^{N-1}x\left(\frac{ir}{r}\right)W_{rN}^{irk}=\sum_{i=0}^{N-1}x(i)W_N^{ik}=X(k)$$

考虑到 N 点 DFT $X(k)$ 只有 N 点，而 rN 点 DFT $Y(k)$ 应有 rN 点，故根据 $X(k)$ 隐含的周期性，有

$$Y(k) = X((k))_N R_{rN}(k)$$

所以 $Y(k)$ 是将 $X(k)$（周期为 N）延拓 r 次形成的，即 $Y(k)$ 的周期为 rN。

3-9 设有一谱分析用的信号处理器，采样点数必须为 2 的整数幂，假定没有采用任何特殊数据处理措施，要求频率分辨率小于或等于 10Hz，如果采用的采样时间间隔为 0.1ms，试确定：

(1) 最小记录长度；

(2) 所允许处理的信号的最高频率；

(3) 在一个记录中的最少点数。

解：

(1) 设最小记录时长为 T_0。因为 $T_0=\frac{1}{F_0}$，而 $F_0\leqslant 10\text{Hz}$，所以

$$T_0 \geqslant \frac{1}{10}\text{s}$$

即最小记录长度为 0.1s。

(2) 因为采样时间间隔为 $T=0.1\text{ms}$，$f_s=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.1}\times 10^3\text{Hz}=10\text{kHz}$，而

$$f_s > 2f_h$$

所以

$$f_h < \frac{1}{2}f_s = 5\text{kHz}$$

即允许处理的信号的最高频率为 5kHz。

(3) $N\geqslant\frac{T_0}{T}=\frac{0.1}{0.1}\times 10^3=1000$，又因 N 必须为 2 的整数幂，所以一个记录中的最少点数为 $N=2^{10}=1024$。

3-10 给定长为 N 的圆周共轭对称序列 $x_{ep}(n)$，圆周共轭反对称序列 $x_{op}(n)$，$0\leqslant n\leqslant N-1$。试证明：当 N 为偶数时，$x_{ep}\left(\frac{N}{2}\right)$ 为实数，$x_{op}\left(\frac{N}{2}\right)$ 为纯虚数。

证明：根据圆周共轭对称序列和圆周共轭反对称序列的定义，有

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*(N-n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*(N-n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

故 $n=0$ 时，有

$$x_{ep}(0) = x_{ep}^*(N)$$

$$x_{op}(0) = -x_{op}^*(N)$$

由于 $x_{ep}(N)$、$x_{op}(N)$ 不在 $x_{ep}(n)$、$x_{op}(n)$ 的主值区间（$0\leqslant n\leqslant N-1$）上，$x_{ep}(N)$、$x_{op}(N)$ 取值是将 $x_{ep}(n)$、$x_{op}(n)$ 以 N 为周期进行周期延拓所得周期序列的值，该数值与主值序列的 $x_{ep}(0)$、$x_{op}(0)$ 呈对称关系。

当 N 为偶数时，根据圆周共轭对称序列和圆周共轭反对称序列的定义，可将原式改写为

$$x_{ep}\left(\frac{N}{2}-n\right)=x_{ep}^*\left(\frac{N}{2}+n\right),\quad 0\leqslant n\leqslant \frac{N}{2}-1$$
$$x_{op}\left(\frac{N}{2}-n\right)=-x_{op}^*\left(\frac{N}{2}+n\right),\quad 0\leqslant n\leqslant \frac{N}{2}-1$$

取 $n=0$ 的特例：

$$x_{ep}\left(\frac{N}{2}\right)=x_{ep}^*\left(\frac{N}{2}\right)$$
$$x_{op}\left(\frac{N}{2}\right)=-x_{op}^*\left(\frac{N}{2}\right)$$

用反证法，设左边 $x_{ep}\left(\frac{N}{2}\right)=a+\mathrm{j}b$ 为复数，右边为 $x_{ep}^*\left(\frac{N}{2}\right)=a-\mathrm{j}b$，两边相等，有 $b=-b$，故 $b=0$；$x_{ep}\left(\frac{N}{2}\right)$为实数。

类似地，可以证明 $x_{op}\left(\frac{N}{2}\right)$为纯虚数。

3-11 序列 $x(n)$的共轭对称和共轭反对称分量分别为

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)],\quad x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]$$

长度为 N 的有限序列 $x(n)(0\leqslant n\leqslant N-1)$的圆周共轭对称和圆周共轭反对称分量分别定义如下：

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((-n))_N]R_N(n)$$
$$x_{op}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N-x^*((-n))_N]R_N(n)$$

（1）证明

$$x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$
$$x_{op}(n)=[x_o(n)+x_o(n-N)]R_N(n)$$

（2）把 $x(n)$看作长度为 N 的序列，一般说，不能从 $x_{ep}(n)$恢复 $x_e(n)$，也不能从 $x_{op}(n)$恢复 $x_o(n)$。试证明：若把 $x(n)$看作长度为 N 的序列，且 $n\geqslant\frac{N}{2}$时，$x(n)=0$，则从 $x_{ep}(n)$可恢复 $x_e(n)$，从 $x_{op}(n)$可恢复 $x_o(n)$。

证明：

（1）由于 $x(n)$只在 $0\leqslant n\leqslant N-1$ 内有值，所以有

$$x_{ep}(n)=\frac{1}{2}[x((n))_N+x^*((-n))_N]R_N(n)$$
$$=\frac{1}{2}x(n)+\frac{1}{2}x^*(N-n)$$

且在以 N 为周期的周期延拓意义下，$n=0$ 时，有

$$x^*(N-n)=x^*(N)=x^*(0)$$

① $0<n\leqslant N-1$ 时，有

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]=\frac{1}{2}x(n)$$
$$x_e(n-N)=\frac{1}{2}[x(n-N)+x^*(N-n)]=\frac{1}{2}x^*(N-n)$$

所以

$$x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$

② $n=0$ 时，对长为 N 的有限长序列 $x(n)$，有

$$x(n-N)R_N(n)=0,\quad x^*(N-n)R_N(n)=0$$

则有

$$\begin{aligned}x_{ep}(n)&=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]R_N(n)\\&=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)+x(n-N)+x^*(N-n)]R_N(n)\\&\equiv[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)\end{aligned}$$

综上①、②所述，对 $0\leqslant n\leqslant N-1$，有

$$x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$

同理可证

$$x_{op}(n)=[x_o(n)+x_o(n-N)]R_N(n)$$

(2) 利用(1)的结果

$$x_{ep}(n)=[x_e(n)+x_e(n-N)]R_N(n)$$

$$x_e(n-N)=\frac{1}{2}[x(n-N)+x^*(-n+N)]$$

① 按照题意，$n\geqslant\frac{N}{2}$时，$x(n)=0$。故当 $0\leqslant n<\frac{N}{2}$时，$x(n)\neq0$。此时

$$-N\leqslant n-N<-\frac{N}{2},\quad \frac{N}{2}<-n+N\leqslant N$$

所以，当 $0\leqslant n<\frac{N}{2}$时，$x(n-N)=0$，$x^*(-n+N)=0$，故

$$x_e(n-N)=0$$

所以，当 $0\leqslant n<\frac{N}{2}$时，$x_{ep}(n)=x_e(n)$。

② 当$-\frac{N}{2}\leqslant n\leqslant-1$ 时，按共轭对称的定义有

$$x_e^*(-n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]=x_e(n)$$

且由(1)的结论知

$$x_{ep}^*(-n)=[x_e^*(-n)+x_e^*(-n+N)]R_N(-n)$$

当$-\frac{N}{2}\leqslant n\leqslant-1$ 时，有

$$N+1\leqslant-n+N\leqslant\frac{N}{2}+N$$

$$x_e^*(-n+N)R_N(-n)=0$$

所以

$$x_{ep}^*(-n)=x_e^*(-n)R_N(-n)=x_e(n)R_N(-n)$$

综上①、②可得

$$x_e(n)=\begin{cases}x_{ep}(n), & 0\leqslant n<\dfrac{N}{2}\\ x_{ep}^*(-n), & -\dfrac{N}{2}\leqslant n\leqslant -1\end{cases}$$

同理可证：

$$x_o(n)=\begin{cases}x_{op}(n), & 0\leqslant n<\dfrac{N}{2}\\ x_{op}^*(-n), & -\dfrac{N}{2}\leqslant n\leqslant -1\end{cases}$$

3-12 设 $X(k)$表示 N 点序列 $x(n)$的 N 点离散傅里叶变换。

(1) 证明如果当 $x(n)$满足关系式 $x(n)=-x(N-1-n)$，则 $X(0)=0$。

(2) 证明当 N 为偶数时，如果 $x(n)=x(N-1-n)$，则 $X\left(\dfrac{N}{2}\right)=0$。

证明：

(1) 因为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

方法 1：当 $x(n)=-x(N-1-n)$时，有

$$\begin{aligned}X(k)=&\sum_{n=0}^{N-1}[-x(N-1-n)R_N(n)W_N^{nk}]\\ =&-\sum_{n=0}^{N-1}[x((N-1-n))_N R_N(n)W_N^{-k(N-1-n)}W_N^{k(N-1)}]\\ =&-\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{-nk}W_N^{k(N-1)}\end{aligned}$$

可以求得

$$X(k)=-X((-k))_N W_N^{k(N-1)}R_N(k)$$

当 $k=0$ 时，有

$$X(0)=-X(-0)=-X(0)$$

即

$$X(0)=0$$

方法 2：将已知 $x(n)=-x(N-1-n)$代入

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

有

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}[-x(N-1-n)]W_N^{nk},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1$$

令 $N-1-n=m$

$$X(k)=-\sum_{m=N-1}^{0}x(m)W_N^{(N-1-m)k}$$

$$=-W_N^{(N-1)k}\sum_{m=0}^{N-1}x(m)W_N^{-mk}$$

$$=-W_N^{(N-1)k}X(-k)$$

其中，考虑 $X(k)$隐含的 N 周期性，写成

$$X(k)=-W_N^{(N-1)k}X((-k))_N R_N(k)$$

当 $k=0$ 时，有 $X(0)=-X(-0)$，则 $X(0)=0$。

(2) 方法 1：依照(1)，当 $x(n)=x(N-1-n)$时，可得

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}[x((N-1-n))_N R_N(n)W_N^{nk}]$$

$$=X((-k))_N W_N^{k(N-1)}R_N(k)$$

当 $k=\frac{N}{2}$(N 为偶数)时，有

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=X\left(\left(-\frac{N}{2}\right)\right)_N R_N\left(\frac{N}{2}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}(N-1)}$$

由 N 为偶数，则有

$$e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}(N-1)}=e^{-j\pi(N-1)}=-1$$

所以

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=-X\left(\left(-\frac{N}{2}\right)\right)_N R_N\left(\frac{N}{2}\right)=-X\left(N-\frac{N}{2}\right)=-X\left(\frac{N}{2}\right)$$

即

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=0$$

方法 2：依照(1)，当 $x(n)=x(N-1-n)$时，可得

$$X(k)=W_N^{(N-1)k}X((-k))_N R_N(k),\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

当 $k=\frac{N}{2}$(N 为偶数)时，有

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=W_N^{(N-1)\frac{N}{2}}X\left(\left(-\frac{N}{2}\right)\right)_N R_N\left(\frac{N}{2}\right)$$

而

$$W_N^{(N-1)k}=W_N^{-k}\big|_{k=\frac{N}{2}}=W_N^{-\frac{N}{2}}=e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot\frac{N}{2}}=-1,\quad X\left(\frac{N}{2}\right)=-X\left(N-\frac{N}{2}\right)=-X\left(\frac{N}{2}\right)$$

所以

$$X\left(\frac{N}{2}\right)=0$$

3-13　证明 DFT 对称定理，即假设

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]$$

证明 $\text{DFT}[X(n)]=Nx(N-k)$。

证明：因为

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[X(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} X(n) W_N^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W_N^{mn}\right) W_N^{kn} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(m+k)n}\end{aligned}$$

由于

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{(m+k)n} = \begin{cases} N, & m = N-k \\ 0, & m \neq N-k, \quad 0 \leqslant m \leqslant N-1 \end{cases}$$

所以

$$\mathrm{DFT}[X(n)] = Nx(N-k), \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

3-14 如果 $X(k)=\mathrm{DFT}[x(n)]$，证明 DFT 的初值定理

$$x(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

证明：由 IDFT 定义式

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-kn}, \quad n = 0,1,2,\cdots,N-1$$

可知

$$x(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)$$

3-15 证明离散相关定理。

若

$$X(k) = X_1^*(k) X_2(k)$$

则

$$x(n) = \mathrm{IDFT}[X(k)] = \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2((l+n))_N R_N(n)$$

证明：直接计算 $X(k)=X_1^*(k)X_2(k)$ 的 IDFT

$$\begin{aligned}x(n) &= \mathrm{IDFT}[X(k)] = \mathrm{IDFT}[X_1^*(k)X_2(k)] \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_1^*(k) X_2(k) W_N^{-kn} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{l=0}^{N-1} x_1(l) W_N^{kl}\right)^* X_2(k) W_N^{-kn} \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_2(k) W_N^{-k(l+n)}, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1\end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_2(k) W_N^{-k(l+n)} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_2(k) W_N^{-k((l+n))_N} = x_2((n+l))_N$$

所以

$$x(n) = \sum_{l=0}^{N-1} x_1^*(l) x_2((l+n))_N R_N(n)$$

3-16 已知序列 $x(n)=a^n u(n)$，$0<a<1$，对 $x(n)$ 的 z 变换 $X(z)$ 在 z 平面单位圆上等间隔采样 N 点，采样值为

$$X(k)=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

求有限长序列 $x_N(n)=\mathrm{IDFT}(X(k))$。

解：因为 $X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$ 是以 2π 为周期的周期函数，所以

$$X((k))_N=X(z)\big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}\xrightarrow{\text{def}}\widetilde{X}(k),\quad k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,N-1,\cdots$$

以 N 为周期，将 $\widetilde{X}(k)$ 看作一周期序列 $\tilde{x}(n)$ 的 DFS，设 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$，则

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\widetilde{X}(k)W_N^{-kn},\quad n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,N-1,\cdots(\text{且以 } N \text{ 为周期})$$

代入

$$\widetilde{X}(k)=X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)W_N^{kn},\quad k=0,1,\cdots,N-1$$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)W_N^{km}\Big)W_N^{-kn}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)}$$

而

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}W_N^{k(m-n)}=\begin{cases}1, & m=n+lN\\ 0, & m\text{ 为其他值}\end{cases}$$

其中，l 为任意整数。将上面的条件代入，考虑给定 n、N、求和区间 $-\infty<m=n+lN<\infty$，对应于 $-\infty<l<\infty$，有

$$\tilde{x}(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n+lN),\quad n=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,N-1,\cdots(\text{且以 } N \text{ 为周期})$$

将 $\tilde{x}(n)$ 的主值区间 $n=0,1,2,\cdots,N-1$，定义为 $x_N(n)$；根据 $X(k)$ 和 $x_N(n)$ 的周期延拓序列的 DFS 系数的关系有

$$X(k)=\widetilde{X}(k)R_N(k),\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$\begin{aligned}x_N(n)&=\mathrm{IDFT}[X(k)]=\tilde{x}(n)R_N(n)\\&=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x(n+lN)R_N(n)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}a^{n+lN}u(n+lN)R_N(n)\end{aligned}$$

对于 $x_N(n)$，由于 $0\leqslant n\leqslant N-1$，所以

$$u(n+lN)=\begin{cases}1, & n+lN\geqslant 0\\ 0, & l<0\end{cases}$$

所以

$$x_N(n)=a^n\sum_{l=0}^{\infty}a^{lN}\cdot R_N(n)=\frac{a^n}{1-a^N}R_N(n)$$

3-17 已知调幅信号的载波频率 $f_c=1\mathrm{kHz}$，调幅信号的频率 $f_m=100\mathrm{Hz}$，用 FFT 对其进行谱分析，试求：

(1) 最小记录时间 $T_{p\min}$；

（2）最低采样频率 $f_{s\,min}$；

（3）最少采样点数 N_{min}；

（4）在频带宽度不变的情况下，将频率分辨率提高一倍的采样点数 N 值。

解：由已知条件可知，已调 AM 信号的最高频率 $f_{max}=1.1\text{kHz}$，频率分辨率 $\Delta f\leqslant 100\text{Hz}$，所以

（1）最小记录时间 $T_{p\,min}=\dfrac{1}{\Delta f}=10\text{ms}$。

（2）最低采样频率 $f_{s\,min}=2f_{max}=2.2\text{kHz}$。

（3）最少采样点数 $N_{min}=\dfrac{T_p}{T_{max}}=T_{p\,min}\cdot f_{s\,min}=22$。

（4）依题意，频率分辨率提高一倍，即 $\Delta f=50\text{Hz}$，所以有

$$T_{p\,min}=\frac{1}{\Delta f}=\frac{1}{50}=0.02\text{s}=20\text{ms}$$

最少采样点数

$$N_{min}=\frac{T_{p\,min}}{T_{p\,max}}=T_{p\,min}\cdot f_{min}=44$$

3-18 以 20kHz 的采样率对最高频率为 10kHz 的带限信号 $x_a(t)$ 采样，然后计算 $x(n)$ 的 $N=1000$ 个采样点的 DFT，即

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}nk},\quad N=1000$$

（1）$k=150$ 和 $k=800$ 对应的模拟频率分别是多少？

（2）采样频率点之间的频率间隔是多少？

（提示：结果请注明单位。）

解：

（1）k 点对应的数字频率为

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k\ \text{rad},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

$k=150$ 点对应的模拟频率为

$$\begin{aligned}\Omega_k&=\omega_k f_s=\frac{2\pi}{N}kf_s\\&=\frac{2\pi}{1000}\times 150\times 20\times 10^3\ \text{rad/s}\\&=6000\pi\ \text{rad/s}\end{aligned}$$

$$f_k=3000\text{Hz}$$

因为采样信号 $x(n)$ 对应的频率响应函数具有周期性，周期为 20kHz，带宽为 $-10\text{kHz}\leqslant f\leqslant 10\text{kHz}$，所以 $k=800$ 点对应的模拟频率为

$$\begin{aligned}\Omega_k&=\omega_k f_s=\frac{2\pi}{N}(k-N)f_s\\&=-\frac{2\pi}{1000}\times 200\times 20\times 10^3\,\text{rad/s}\end{aligned}$$

$$= -8000\pi \text{ rad/s}$$

$$f_k = -4000\text{Hz}$$

即物理上的实际频率为 4000Hz。

(2) 频谱采样点之间的频率间隔为

$$\Delta f_{\text{bin}} = \frac{f_s}{N} = \frac{20 \times 10^3}{1000}\text{Hz} = 20\text{Hz}$$

第4章 快速傅里叶变换

CHAPTER 4

4.1 重点内容

4.1.1 概述

一个长为 N 的序列 $x(n)$，直接计算 N 点 DFT 的定义式如式(4.1.1)所示。

$$X(k) \equiv \mathrm{DFT}[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}, \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.1}$$

其中，$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$。$X(k)$通常是复数函数，每计算一个 $X(k)$，须 N 次复数乘，$N-1$ 次复数加。计算 N 个 $X(k)$，须 N^2 次复数乘和 $N(N-1)$次复数加。直接计算 DFT 的运算量(复数乘、复数加)近似比例于 N^2。N 很大时，N 点 DFT 的运算量很大，无法应用到一些实时性要求高的领域。

N 点 DFT 定义式中旋转因子 W_N^m 具有如下性质。

(1) 周期性：

$$W_N^{m+lN} = W_N^m = W_N^{(m+lN)\,\mathrm{mod}(N)} \tag{4.1.2}$$

(2) 对称性：

$$W_N^{N-m} = W_N^{-m} = (W_N^m)^* \tag{4.1.3a}$$

$$W_N^{\frac{N}{2}+m} = -W_N^m, \quad N\text{ 为偶数} \tag{4.1.3b}$$

(3) 可约性：

$$W_N^m = W_{Nk}^{mk} = W_{N/k}^{m/k} \tag{4.1.4}$$

特别提示：

- 快速傅里叶变换(FFT)是一类实现 DFT 运算的快速算法。
- 基于 DFT 中旋转因子 W_N^m 的周期性、对称性、可约性，FFT 算法一般是将长为 N 的序列分成几个较短的序列，通过计算这些更小点数的 DFT，减小直接计算 N 点 DFT 的运算量。

4.1.2 基-2 FFT

基(Radix)-2 FFT，即 DFT 的点数 $N=2^M$(M 为整数时)的 FFT 算法可分为两类：按

时间抽取法 FFT(decimation in time FFT,DIT-FFT)和按频率抽取法 FFT (decimation in frequency FFT,DIF-FFT)。

1. DIT-FFT 原理

1) DIT(Cooley-Tukey)-FFT 思路

把长为 $N=2^M$点的时域序列 $x(n)$按序号的奇偶逐级分解,最终得到$\frac{N}{2}$个 2 点时域序列。通过迭代计算各级 2 点的 DFT,使 N 点 DFT 计算量减少。

2) 计算步骤

(1) 按时间抽取。

把 $x(n)$按序号的奇偶分成两个长$\frac{N}{2}$的子序列

$$x_1(r) \equiv x(2r) \tag{4.1.5a}$$

$$x_2(r) \equiv x(2r+1), \quad r=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{4.1.5b}$$

(2) $x(n)$的 N 点 DFT 的等效变形。

设 $X_1(k)$和 $X_2(k)$分别是 $x_1(r)$,$x_2(r)$的$\frac{N}{2}$点 DFT,$k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$;则可以推导出 $x(n)$的 N 点 DFT $X(k)$与 $X_1(k)$和 $X_2(k)$满足式(4.1.6a)和式(4.1.6b)所示的蝶形运算关系。

$$X(k)=X_1(k)+W_N^k X_2(k), \quad k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{4.1.6a}$$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=X_1(k)-W_N^k X_2(k), \quad k=0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{4.1.6b}$$

(3) 蝶形运算。

式(4.1.6a)和式(4.1.6b)综合起来,就是 $x(n)$的 N 点 DFT 的结果,这两个方程通常也称为“蝶形融合方程”(butterfly merging equations)。式(4.1.6a)和式(4.1.6b)可形象地用信号流图表示,如图 4-1 所示。因其形状似蝶形,故称为基本蝶形运算流图。

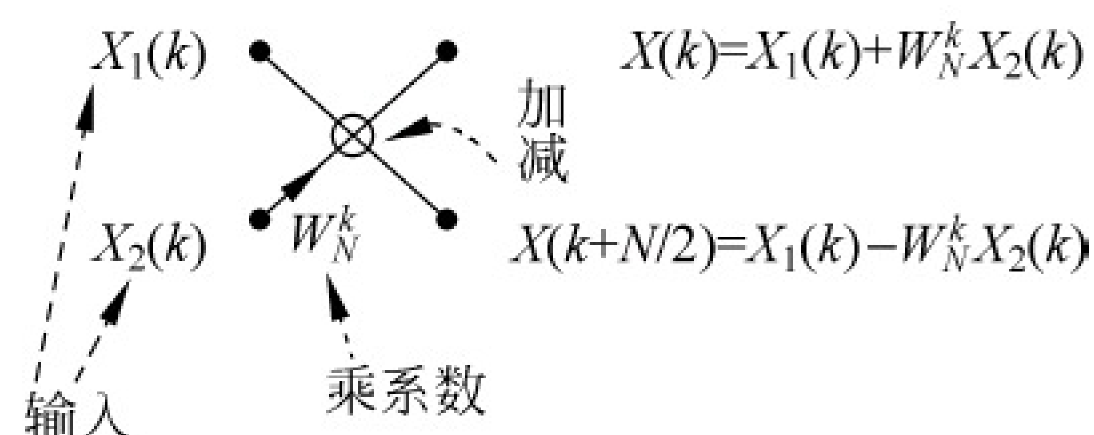


图 4-1 基本蝶形运算流图

(4) $N=2^M$ 点 DIT-FFT 运算流图。

由式(4.1.6a)和式(4.1.6b)可知,$x(n)$的 N 点 DFT 可通过计算两个$\frac{N}{2}$点序列 $x_1(r)$、$x_2(r)$的 DFT $X_1(k)$和 $X_2(k)$实现;按这个思想,实际 $X_1(k)$和 $X_2(k)$的计算,是通过将 $x_1(r)$、$x_2(r)$按各自序号 r 的奇偶继续抽取;……最终得到$\frac{N}{2}$个 2 点时域序列,对这些 2 点序列进行基本蝶形运算,实现 N 点 DFT。因此 $N=2^M$点的 DIT-FFT 的蝶形运算有 M 级,每级都有$\frac{N}{2}$个基本蝶形运算。$N=8$ 时的运算流图如图 4-2 所示。

3) DIT-FFT 和直接 DFT 运算量的比较

$N=2^M$ 点 DIT-FFT 运算量如下。

复数乘次数:

$$C_M(2)=M\times\frac{N}{2}=\frac{N}{2}\log_2(N) \tag{4.1.7}$$

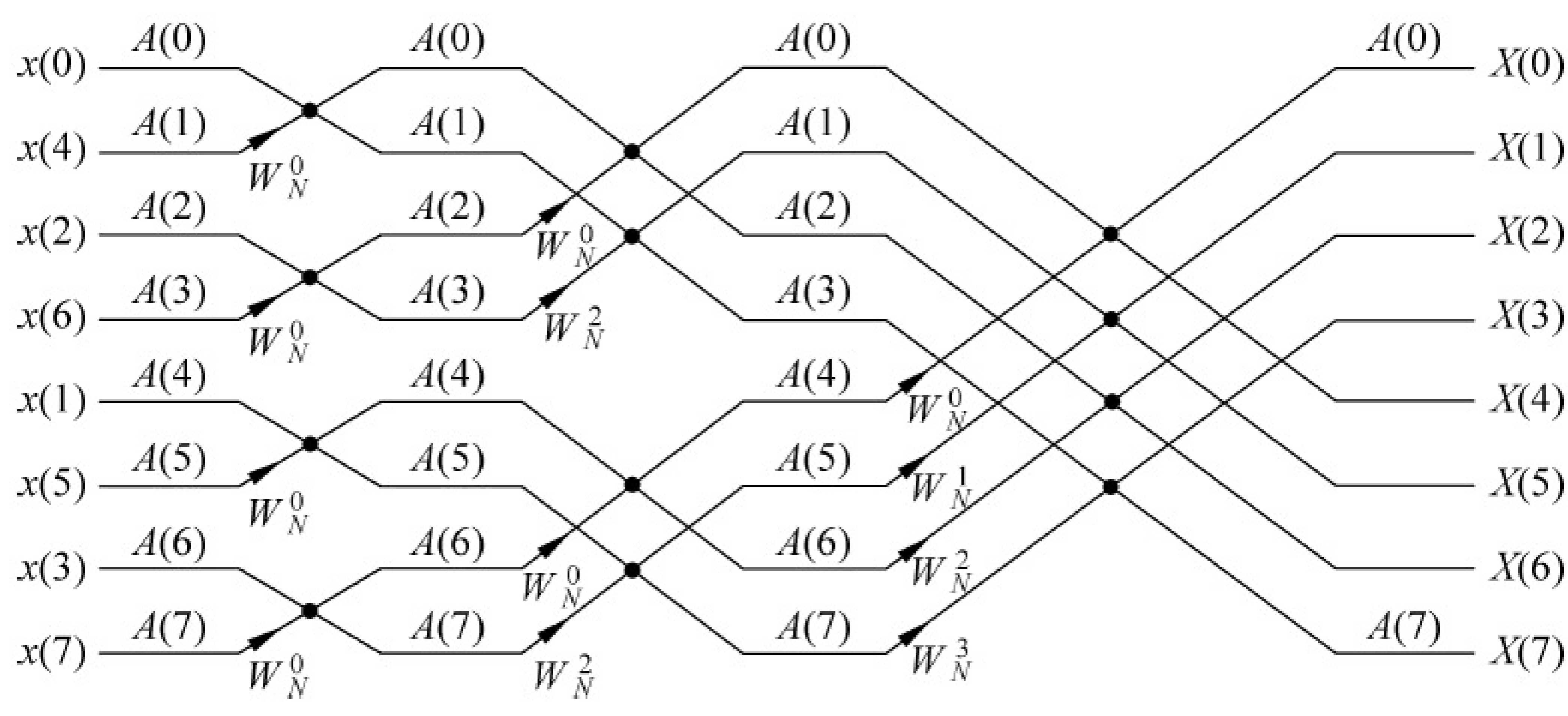


图 4-2　N 点 DIT-FFT 运算流图($N=2^3=8$)

复数加次数：

$$C_A(2)=M\times 2\times \frac{N}{2}=N\log_2(N) \tag{4.1.8}$$

直接 N 点 DFT 运算量如下。

复乘次数：　N^2

复加次数：　$N(N-1)$

4）DIT-FFT 的运算规律及编程思想

（1）原位(同址)运算。

每个蝶形运算的两个输入只用于本蝶形运算。蝶形运算的输出可直接存入原输入数据的存储单元。对应硬件处理器，节省内存，降低成本。

（2）整序规律。

DIT-FFT 算法中，输出 $X(k)$ 为自然顺序，输入序列 $x(n)$ 的排序经过 $M-1$ 级奇偶抽取后为序列 $x(n)$ 的倒序，此过程简称“整序”。整序规律体现为二进制码序号作为序列值寄存器地址时的变址运算(bit reversal，位反序)。$N=2^3$ 点序列 $x(n)$ 的整序如图 4-3 所示。

序号二进制码 ($n_2n_1n_0$)	序列	奇偶抽取 1st	奇偶抽取 2nd	序号二进制码 位反序($n_0n_1n_2$)
000	$x(0)$	$x(0)$	$x(0)$	000
001	$x(1)$	$x(2)$	$x(4)$	100
010	$x(2)$	$x(4)$	$x(2)$	010
011	$x(3)$	$x(6)$	$x(6)$	110
100	$x(4)$	$x(1)$	$x(1)$	001
101	$x(5)$	$x(3)$	$x(5)$	101
110	$x(6)$	$x(5)$	$x(3)$	011
111	$x(7)$	$x(7)$	$x(7)$	111

图 4-3　$N=2^3$ 点 DIT-FFT 的整序示意

（3）蝶形运算两个点的“间距”、系数 W_N^k 的变化规律。

参考图 4-2，由 $N=2^3=8$ 点 DIT-FFT 算法流程图可知：当 $N=2^M$ 时，DIT-FFT 算法流程共有 M 级，每级有 $\frac{N}{2}$ 个蝶形；各级蝶形运算的旋转因子 W_N^p 也不相同。用 L 表示 FFT

算法流程图从左至右的运算级数，$L=1,2,\cdots,M$；第 L 级共有 2^{L-1} 个旋转因子 W_N^p，其中的一个旋转因子对应的蝶形运算结束后，数组元素的值用 $X_L(k)$ 表示，蝶形运算迭代公式为

$$X_L(k)=X_{L-1}(k)+W_N^p X_{L-1}(k+B) \tag{4.1.9a}$$

$$X_L(k+B)=X_{L-1}(k)-W_N^p X_{L-1}(k+B) \tag{4.1.9b}$$

式(4.1.9a)和式(4.1.9b)中，$L=1,2,\cdots,M$；第 L 级每个蝶形两个输入数据点间距 $B=2^{L-1}$；$k=J,J+2^L,J+2\times2^L,\cdots,k\leqslant N-1$（借用 MATLAB 软件的 For 循环变量表达格式，简写为 $k=J:2^L:N-1$）。这里，第 L 级中第 J 个旋转因子 W_N^p 的指数 $p=J\cdot2^{M-L}$，$J=0,1,2,\cdots,2^{L-1}-1$；同一旋转因子 W_N^p 对应着间距为 2^{L-1} 点的 2^{M-L} 个蝶形运算。

2. DIF-FFT

按频率抽取的 FFT 在有的文献中也被称为 Sand-Tukey-FFT。相比 DIT-FFT，DIF-FFT 具有以下特点。

1) 时域数据 $x(n)$ 的抽取方式

将长为 $N=2^M$ 的输入自然顺序序列 $x(n)$，陆续进行 $M-1$ 级前后对半分组，最终得到 $\frac{N}{2}$ 组 2 点序列。迭代计算这些 2 点 DFT，就是计算小点数的 DFT，降低了直接进行 N 点 DFT 的计算量。

2) DFT 输出序列 $X(k)$

DIF-FFT 输出 DFT 结果 $X(k)$ 是“乱序”，即“位反序”排列。这种位反序排列的结果和自然顺序 DFT $X(k)$ 之间的“整序规律”和 DIT-FFT 的输入序列整序规则一样。

3) 基本蝶形运算流程

(1) 运算规律。

参考图 4-4 所示的 DIF-FFT 蝶形运算流图：对 DIF-FFT 的每个蝶形运算，右上端输出由两个输入数据相加得到；右下端输出由两个输入数据先做减法运算，差值乘合适的复数旋转因子 W_N^p 得到。

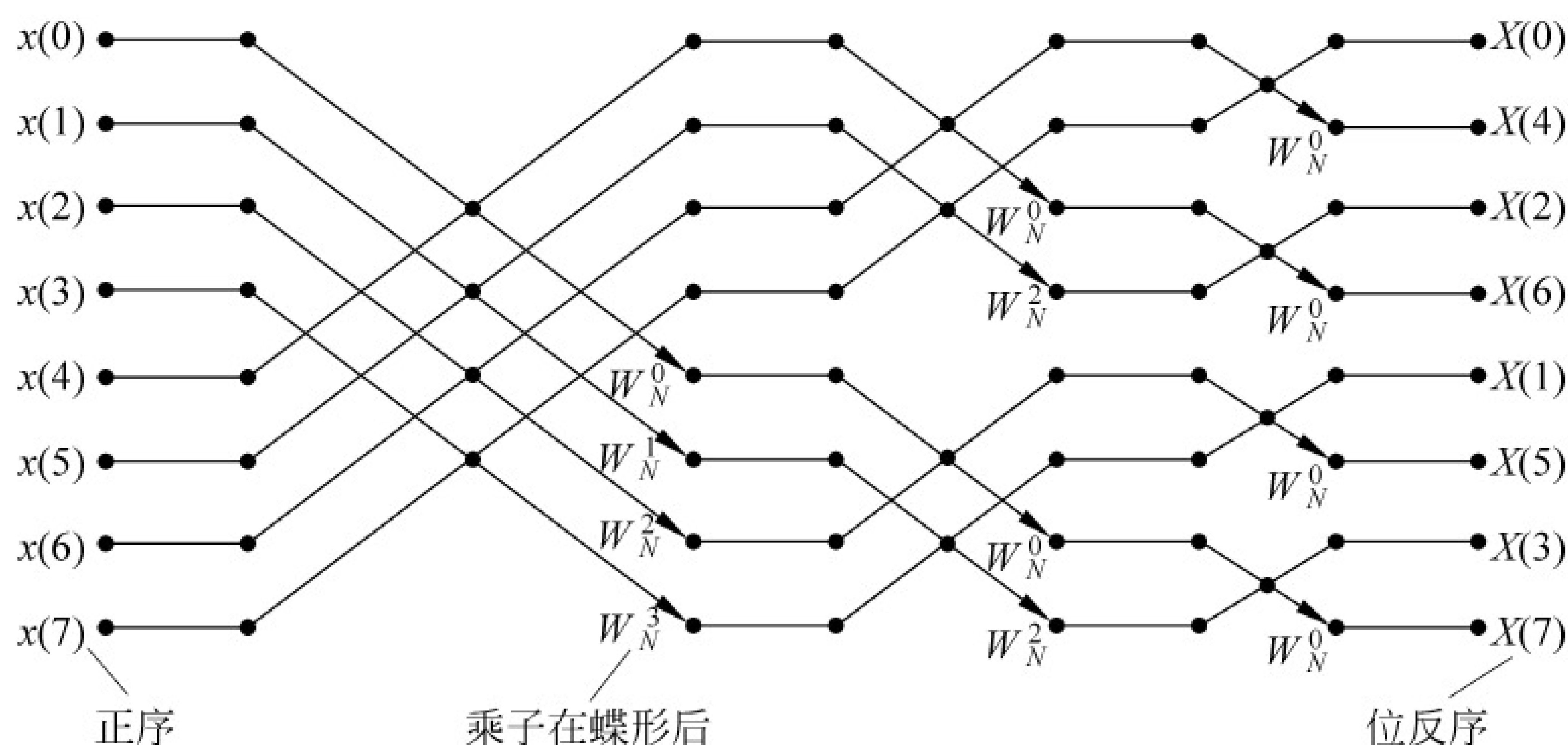


图 4-4　DIF-FFT 完整的运算流图（$N=2^3=8$）

(2) 原位（同址）运算。

DIF-FFT 也可进行原位运算，存储单元每步刷新，节省内存。

(3) 蝶形运算两个点的“间距”、系数 W_N^p 的变化规律。

参考图 4-4，用 L 表示 DIF-FFT 算法流程图从左至右的运算级数，$L=1,2,\cdots,M$。①DIF-FFT 第 L 级的每个蝶形两输入数据“间距”$B=2^{M-L}$。②DIF-FFT 的旋转因子 W_N^p 的指数计算，$p=J\cdot 2^{L-1}$，其中 $J=0,1,2,\cdots,2^{M-L}-1$。

(4) DIF-FFT 算法中蝶形运算的通式：

$$X_L(k)=X_{L-1}(k)+X_{L-1}(k+B) \tag{4.1.10a}$$

$$X_L(k+B)=[X_{L-1}(k)-X_{L-1}(k+B)]W_N^p \tag{4.1.10b}$$

其中，$L=1,2,\cdots,M$；$B=2^{M-L}$；$J=0,1,2,\cdots,2^{M-L}-1$；$p=J\cdot 2^{L-1}$；$k=J:2^{M-L+1}:N-1$。

3. 快速傅里叶反变换

根据 IDFT 的定义和旋转因子 W_N^{kn} 的共轭对称性，可直接调用现成的 FFT 程序，实现快速 IDFT-IFFT 算法。步骤如下。

(1) 对 DFT 谱序列 $X(k)$ 取共轭，得 $X^*(k)$。

(2) 对 $X^*(k)$ 进行 FFT。

(3) 对(2)的结果取共轭，并乘以 $\frac{1}{N}$，得 $x(n)$。

4.1.3 矩阵形式的 FFT

1. 算法原理

设 DFT 的点数 $N=ML$。一维序列 $x(n)$ 长为 N，可排成 L 行，M 列的矩阵形式 $\boldsymbol{x}_{L\times M}$，如图 4-5 所示。设矩阵中行 n_1，列 n_0 处的元素 $x(n_1,n_0)$ 对应序列值 $x(n)$，则序列号 n 和矩阵元素标号 n_1,n_0 之间的映射关系为

$$n=Mn_1+n_0,\quad n_1=0,1,\cdots,L-1,\quad n_0=0,1,2,\cdots,M-1 \tag{4.1.11}$$

即

$$x(n)=x(Mn_1+n_0)\equiv x(n_1,n_0),\quad n_1=0,1,\cdots,L-1,\quad n_0=0,1,2,\cdots,M-1 \tag{4.1.12}$$

对长为 $N=ML$ 的离散频谱序列 $X(k)$，也可排成 M 行，L 列的矩阵形式 $\boldsymbol{X}_{M\times L}$，如图 4-6 所示。设矩阵中行 k_1，列 k_0 处的元素 $X(k_1,k_0)$ 对应序列值 $X(k)$，则序列号 k 和矩阵元素标号 k_1,k_0 之间的映射关系如下：

$$k=Lk_1+k_0,\quad k_1=0,1,\cdots,M-1,\quad k_0=0,1,2,\cdots,L-1 \tag{4.1.13}$$

即

$$X(k)=X(Lk_1+k_0)\equiv X(k_1,k_0),\quad k_1=0,1,\cdots,M-1,\quad k_0=0,1,2,\cdots,L-1 \tag{4.1.14}$$

$x(0)=x(0,0)$	$x(1)=x(0,1)$	$\cdots$	$x(M-1)=x(0,M-1)$
$x(M)=x(1,0)$	$x(M+1)=x(1,1)$	$\cdots$	$x(2M-1)=x(1,M-1)$
$x(2M)=x(2,0)$	$x(2M+1)=x(2,1)$	$\cdots$	$x(3M-1)=x(2,M-1)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$x(n_1,n_0)$	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$x((L-1)M)=x(L-1,0)$	$x((L-1)M+1)=x(L-1,1)$	$\cdots$	$x(LM-1)=x(L-1,M-1)$

图 4-5 将时域序列 $x(n)$ 排列成矩阵形式

$$
\begin{array}{cccc}
X(0)=X(0,0) & X(1)=X(0,1) & \cdots & X(L-1)=X(0,L-1) \\
X(L)=X(1,0) & X(L+1)=X(1,1) & \cdots & X(2L-1)=X(1,L-1) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \\
\cdots & \cdots & X(k_1,k_0) & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
X((M-1)L)=X(M-1,0) & X((M-1)L+1)=X(M-1,1) & \cdots & X(ML-1)=X(M-1,L-1)
\end{array}
$$

图 4-6　将频域序列 $X(k)$排列成矩阵形式

矩阵形式的 FFT 算法步骤：

(1) 输入序列 $x(n)$，$n=Mn_1+n_0$，$n_1=0,1,2,\cdots,L-1$，$n_0=0,1,2,\cdots,M-1$，作为矩阵元素 $x(n_1,n_0)$读入 L 行×M 列的矩阵 $\boldsymbol{x}_{L\times M}$：

$$
\boldsymbol{x}_{L\times M}=\begin{bmatrix}
x(0,0) & x(0,1) & \cdots & x(0,n_0) & \cdots & x(0,M-1) \\
x(1,0) & x(1,1) & \cdots & x(1,n_0) & \cdots & x(1,M-1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x(n_1,0) & x(n_1,1) & \cdots & x(n_1,n_0) & \cdots & x(n_1,M-1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x(L-1,0) & x(L-1,1) & \cdots & x(L-1,n_0) & \cdots & x(L-1,M-1)
\end{bmatrix}
$$

(2) 按列，如第 n_0 列，作 L 点 DFT。L 个谱值对应着 $\boldsymbol{X}_{1\,L\times M}$矩阵中第 n_0 列的各行元素：

$$
\boldsymbol{X}_{1\,L*M}=\begin{bmatrix}
X_1(0,0) & X_1(0,1) & \cdots & X_1(0,n_0) & \cdots & X_1(0,M-1) \\
X_1(1,0) & X_1(1,1) & \cdots & X_1(1,n_0) & \cdots & X_1(1,M-1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
X_1(k_0,0) & X_1(k_0,1) & \cdots & X_1(k_0,n_0) & \cdots & X_1(k_0,M-1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
X_1(L-1,0) & X_1(L-1,1) & \cdots & X_1(L-1,n_0) & \cdots & X_1(L-1,M-1)
\end{bmatrix}
$$

(3) $\boldsymbol{X}_{1\,L*M}$各元素乘对应旋转因子得 L 行×M 列的中间矩阵 $\boldsymbol{X}'_{1\,L\times M}$，该矩阵的元素为：

$$
X'_1(k_0,n_0)=W_N^{n_0k_0\,\mathrm{mod}(N)}X_1(k_0,n_0),\quad k_0=0,1,\cdots,L-1,\quad n_0=0,1,\cdots,M-1 \tag{4.1.15}
$$

(4) $\boldsymbol{X}'_{1\,L\times M}$按行作 M 点 DFT，M 个谱值对应 $\boldsymbol{X}_{2\,L\times M}$中第 k_0 行的各列元素：

$$
\boldsymbol{X}_{2\,L\times M}=\begin{bmatrix}
X_2(0,0) & X_2(0,1) & \cdots & X_2(0,k_1) & \cdots & X_2(0,M-1) \\
X_2(1,0) & X_2(1,1) & \cdots & X_2(1,k_1) & \cdots & X_2(1,M-1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
X_2(k_0,0) & X_2(k_0,1) & \cdots & X_2(k_0,k_1) & \cdots & X_2(k_0,M-1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
X_2(L-1,0) & X_2(L-1,1) & \cdots & X_2(L-1,k_1) & \cdots & X_2(L-1,M-1)
\end{bmatrix}
$$

(5) $\boldsymbol{X}_{2\,L\times M}$转置得 M 行，L 列的矩阵 $X_{M\times L}$。该矩阵中的元素 $\boldsymbol{X}_{M\times L}(k_1,k_0)$，对应于序列值 $X(k)$，其中，

$$k = Lk_1 + k_0, \quad k_1 = 0,1,2,\cdots,M-1, \quad k_0 = 0,1,2,\cdots,L-1$$

以上矩阵表述把大点数的 DFT 分解成了两种小点数的 DFT，减少了 DFT 的运算量。以此类推，还可以对 L，M 点的 DFT 用矩阵形式继续分解，获得更小点数的 DFT 运算单元，整体上提高 N 点 DFT 的运算速度。

2. 进一步减少运算量的措施

1）区分多类蝶形单元运算

第 1 类：程序包含所有的旋转因子。

第 2 类：程序中去掉 $W_N^r=\pm 1$ 的旋转因子。

第 3 类：程序中去掉 $W_N^r=\pm 1$、$W_N^r=\pm \mathrm{j}$ 的旋转因子。

第 4 类：程序中去掉 $W_N^r=\pm 1$、$W_N^r=\pm \mathrm{j}$ 的旋转因子，并考虑 $W_N^r=(1-\mathrm{j})\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的特殊性。

2）选择旋转因子的生成方式

预先计算所有的复数旋转因子，存于数组中，用时直接查表得其值，避免多次计算。

3）实序列的 FFT 快速实现

(1) 用一个 N 点 FFT 同时计算两个实序列的 DFT。

设实序列 $x_1(n)$、$x_2(n)$的 N 点 DFT 分别为 $X_1(k)$，$X_2(k)$。

① 构造 N 点复序列 $x(n)=x_1(n)+\mathrm{j}\,x_2(n)$，其 N 点 DFT：

$$X(k) = X_1(k) + \mathrm{j}X_2(k), \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.16}$$

② 利用 DFT 的共轭对称性，用蝶形运算计算 $X_1(k)$、$X_2(k)$：

$$X_1(k) = \frac{1}{2}[X(k) + X^*(N-k)] = X_{\mathrm{ep}}(k) \tag{4.1.17}$$

$$X_2(k) = -\mathrm{j}\,\frac{1}{2}[X(k) - X^*(N-k)] = -\mathrm{j}\,X_{\mathrm{op}}(k) \tag{4.1.18}$$

其中，$X_{\mathrm{ep}}(k)$和 $X_{\mathrm{op}}(k)$分别为 $X(k)$的周期共轭对称分量和周期共轭反对称分量。

(2) 用$\frac{N}{2}$点的 FFT，计算 $N=2^M$ 点实序列 $x(n)$的 FFT。

① 把 $x(n)$进行奇偶抽取，分成两个子序列，构造新的$\frac{N}{2}$点复序列：

$$y(n) = x(2n) + \mathrm{j}x(2n+1), \quad n = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{4.1.19}$$

计算 $y(n)$的$\frac{N}{2}$点 FFT 得 $Y(k)$，$k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$。

② 计算 $Y(k)$的周期共轭对称和周期共轭反对称序列：

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[x(2n)] &\equiv X_1(k) \\ &= Y_{\mathrm{ep}}(k) = \frac{1}{2}[\,Y(k) + Y^*(N-k)]\end{aligned} \tag{4.1.20a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{DFT}[x(2n+1)] &\equiv X_2(k) \\ &= -\mathrm{j}\,Y_{\mathrm{op}}(k) = -\mathrm{j}\,\frac{1}{2}[\,Y(k) - Y^*(N-k)]\end{aligned} \tag{4.1.20b}$$

③ 由蝶形运算计算 $x(n)$序列 N 点 DFT：

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \tag{4.1.21a}$$

$$X(N-k) = X_1(k) - W_N^k X_2(k), \quad k = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{4.1.21b}$$

4.1.4 FFT 应用于长序列卷积

1. 快速卷积

设系统单位采样脉冲响应 $h(n)$长 M，输入序列 $x(n)$长 L，如图 4-7 所示。根据圆周卷积和线性卷积结果相同的条件，计算系统输出 $y(n)$的快速卷积的具体步骤如下。

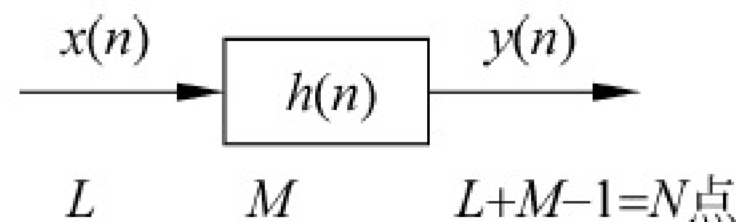


图 4-7 序列 $x(n)$通过数字系统 $h(n)$

(1) 将 $h(n)$、$x(n)$分别后补零成长为 $N \geqslant L+M-1$ 点的序列，且 N 应为 2 的整数次幂。用 FFT 分别计算其 N 点 DFT，得频谱序列$H(k)$、$X(k)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$。

(2) 将两个谱序列相乘，得 $Y(k)=X(k)\cdot H(k)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$。

(3) 对 $Y(k)$进行 N 点 IDFT，得时域序列 $y(n)=x(n)\,Ⓝ\,h(n)$，$n=0,1,2,\cdots,N-1$。

(4) 因为圆周卷积的点数 N 大于线性卷积的点数，$y(n)$的前 $L+M-1$ 点就是所要求的线性卷积，即对应于输入 $x(n)$，单位采样脉冲响应为 $h(n)$时的系统输出时域信号。

实际应用中，当输入序列 $x(n)$长 L 远大于系统单位采样脉冲响应 $h(n)$长 M 时，$N \geqslant L+M-1$ 点的 DFT 运算量较大，不适合实时性要求高的信号处理要求，这时一般采用分段(圆周)卷积。常用的分段卷积有重叠相加法、重叠保留法等。

2. 重叠相加

采用重叠相加法进行长序列的线性卷积，原理如图 4-8 所示。计算步骤如下：

(1) 设 $h(n)$长为 M，把 $x(n)$分成长为 L 的小段，不失一般地，$L> M$。

(2) 各小段后补零，成为点数为 $N=L+M-1$ 长的子段序列 $x_k(n)$，$n=0,1,2,\cdots,N-1$；$k=0,1,2,\cdots$，每段 $x_k(n)$数据包括 L 个新实际样值点+后补的 $M-1$ 个零。选择合适的 L 数值，可保证 N 为 2 的整数次幂。

(3) 计算每段 $x_k(n)$与 $h(n)$的 N 点圆周卷积 $x_k(n)\,Ⓝ\,h(n)$。

具体快速卷积可等效地通过 FFT 算法求 $N(=L+M-1)$点圆周卷积，即

$$y_k(n) = x_k(n)\,Ⓝ\,h(n), \quad k = 0,1,2,\cdots$$

各段圆周卷积结果之间有 $N-L=L+M-1-L=M-1$ 点的重叠。

(4) 把各段的卷积(含重叠部分)，对应序号的卷积数值相加——“重叠相加”，得系统实际输出。

3. 重叠保留

长序列的线性卷积采用重叠保留法进行分段(圆周)卷积的原理如图 4-9 所示。计算步骤如下。

(1) 设 $h(n)$长为 M，把 $x(n)$分成长为 L 的小段，不失一般地，$L> M$。

(2) 各小段均补成点数为 $N=L+M-1$ 长的子段序列 $x_k(n)$，$n=0,1,2,\cdots,N-1$；$k=$

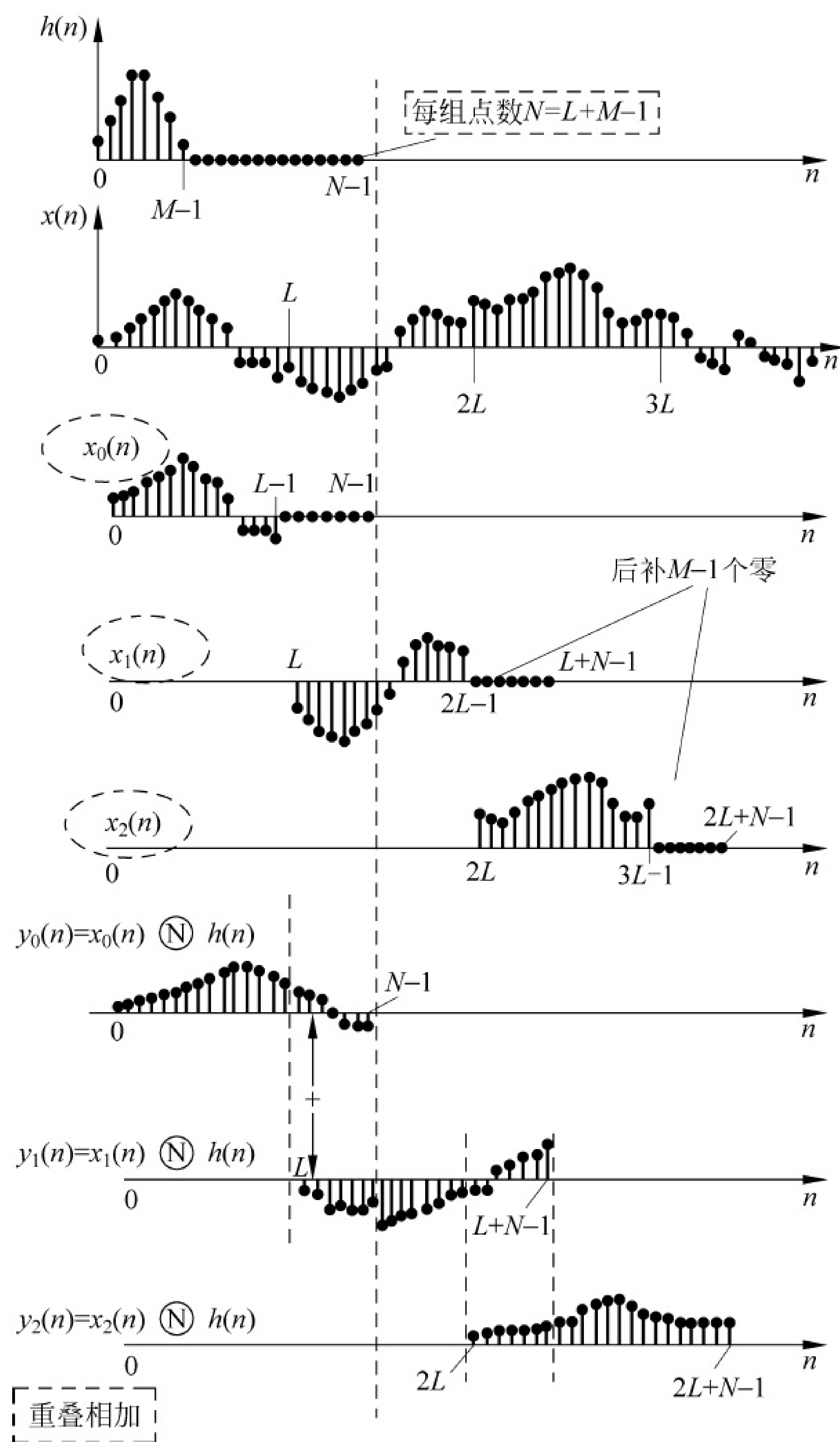


图 4-8　重叠相加原理示意

0,1,2,…,每段 $x_k(n)$数据由保留下来的前段 $x_{k-1}(n)$最后 $M-1$ 个样值点＋自身的 L 个实际样值点构成。

特别是第一段 $x_0(n)$,$n=0,1,2,\cdots,N-1$,是在其 L 个实际样值点的前面补 $M-1$ 个零构成。

(3) 每段 $x_k(n)$与 $h(n)$进行 N 点圆周卷积：$x_k(n)Ⓝh(n)$。

具体快速卷积可等效地通过 FFT 算法求 $N(=L+M-1)$点圆周卷积,即

$$y_k(n)=x_k(n)Ⓝh(n),\quad k=0,1,2,\cdots$$

(4) 把各段卷积的结果的前 $L+M-1-L=M-1$ 个点舍去。

(5) 各段卷积结果,按时间顺序连接起来就是系统 $h(n)$的输出时域信号。

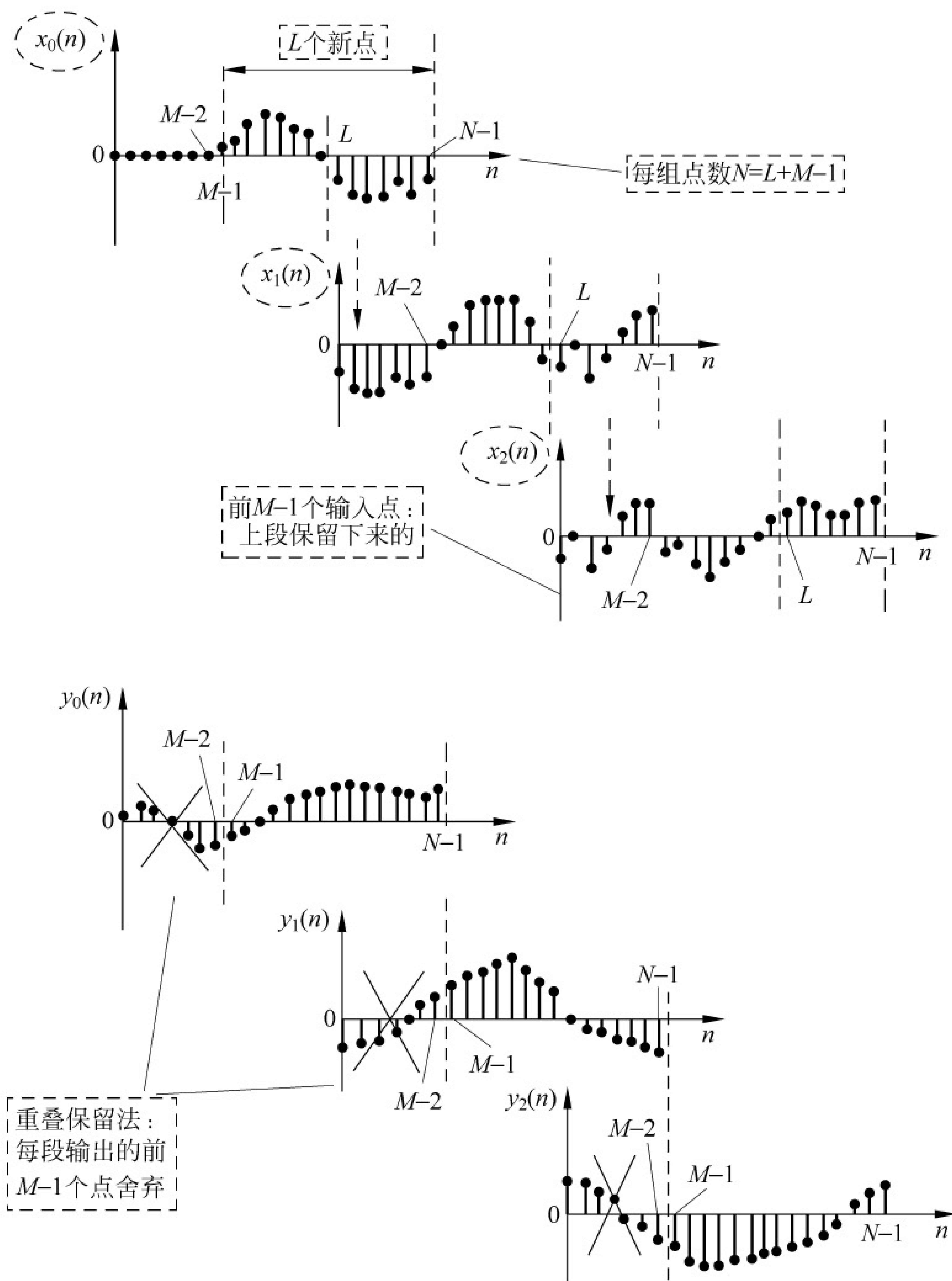


图 4-9 重叠保留原理示意

4.1.5 线性调频-z 变换

实际工程应用中，有些信号的频率范围较窄，利用线性调频 z 变换(chirp z transform，CZT)可以实现窄带信号高频率分辨率的快速分析。

1. CZT 的定义

DFT 可看成是对信号或系统单位采样脉冲响应的 z 变换在 z 平面单位圆上的等间隔$\left(\frac{2\pi}{N}\right)$采样值，而 M 点 CZT 就可看成是对 z 变换函数在 z 平面上的任意一段弧线上的等分角(ϕ_0)采样值，如图 4-10 所示。实现频域"局部细化"的效果。

给定时域序列 $x(n)$，$n=0,1,2,\cdots,N-1$，M 点 CZT 的定义如式(4.1.22)所示。

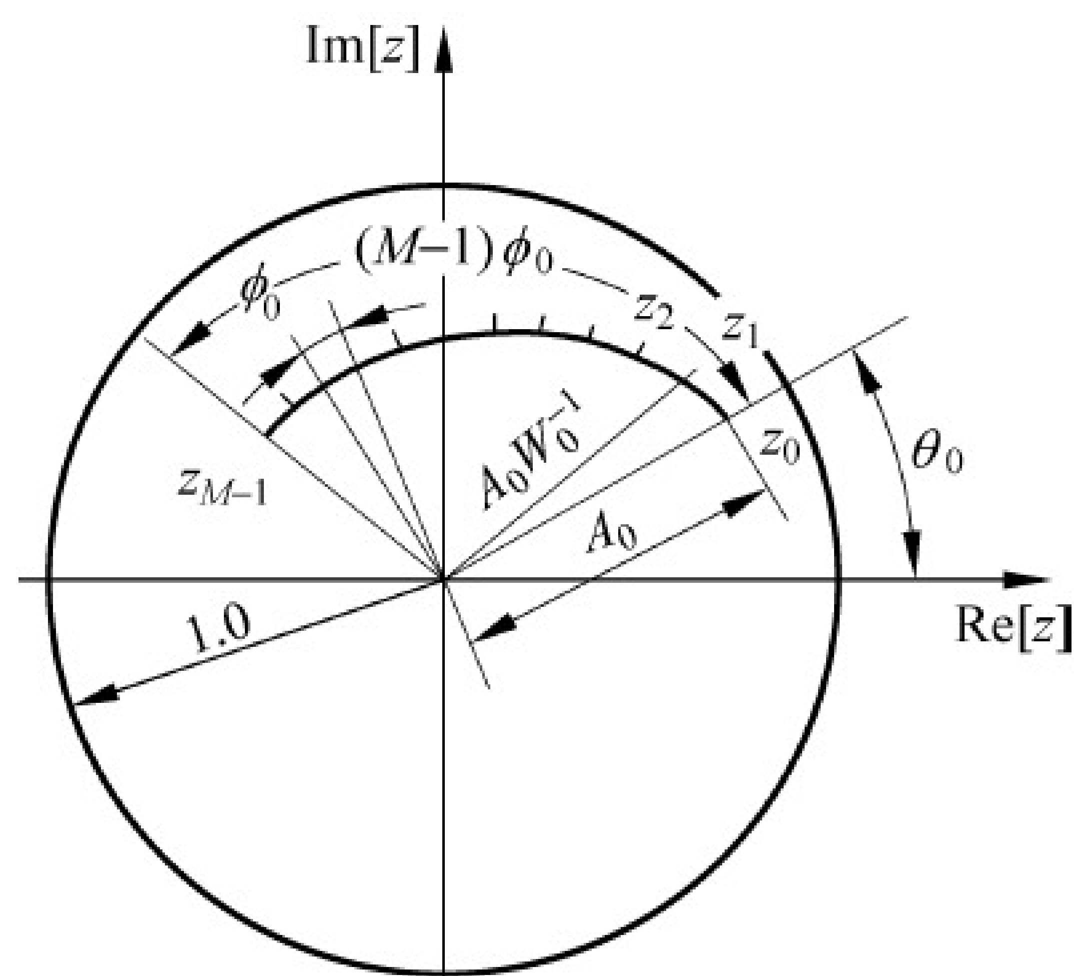


图 4-10 CZT 算法定义

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)[AW^{-k}]^{-n}$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{kn},\quad k=0,1,2,\cdots,M-1 \tag{4.1.22}$$

其中，$A=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}$，$W=W_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\phi_0}$，分别为任意复常数；$A_0,W_0,\theta_0,\phi_0$ 为任意实数。当 $k=0,1,2,\cdots,M-1$ 时，可得到 z 平面上某段弧线上的 M 个点，$z_k=AW^{-k}=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0}W_0^{-k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\phi_0}$。

2. CZT 的特点

(1) 输入 $x(n)$和输出序列 $X(z_k)$长可以不相等。

(2) 可从任意频率 θ_0弧度开始，对 $x(n)$的任意窄带频率范围$[\theta_0,\theta_0+(M-1)\phi_0]$上做高分辨率的谱分析。

(3) 谱分析路径的变化规律：

① $W_0>1$ 时，随着 k 的增加，z_k 的幅度减小，螺线内缩。

② $W_0<1$ 时，随着 k 的增加，z_k 的幅度变大，螺线外伸。

③ $A_0>1$ 时，螺旋线在 z 平面单位圆外；反之，在单位圆内。

④ 当 $A_0=W_0=1$，θ_0、ϕ_0 任意时，CZT 分析路径为 z 平面单位圆上的一段弧线。

⑤ 当 $A_0=W_0=1,\theta_0=0,M=N,\phi_0=\dfrac{2\pi}{N}$时，CZT 具体为一般的 N 点 DFT。

3. CZT 的快速实现

将 CZT 定义式变换成线性卷积的形式，利用 FFT 实现 CZT 的快速计算。定义式(4.1.22)可等效为式(4.1.23)。

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{kn}$$
$$=W^{k^2/2}\sum_{n=0}^{N-1}[x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}}]W^{-\frac{(k-n)^2}{2}} \tag{4.1.23}$$

令

$$X(z_k)\equiv W^{k^2/2}\sum_{n=0}^{N-1}g(n)h(k-n),\quad k=0,1,2,\cdots,M-1 \tag{4.1.24}$$

式(4.1.24)的卷积和运算中

$$g(n)=x(n)A^{-n}W^{\frac{n^2}{2}},\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.25a}$$

$$h(n)=W^{-\frac{n^2}{2}} \tag{4.1.25b}$$

设 $x(n)$序列长为 N,M 点的 CZT 快速实现步骤总结如下：

(1) 选 $L\geqslant N+M-1$,$L=2^v$。

(2) 如式(4.1.26)构造 L 点因果序列 $h(n)$,所得 $h(n)$的波形如图 4-11 所示。

$$h(n)=\begin{cases}W^{-\frac{n^2}{2}}, & 0\leqslant n\leqslant M-1\\ 0, & M\leqslant n\leqslant L-N\\ W^{-\frac{(L-n)^2}{2}}, & L-N+1\leqslant n\leqslant L-1\end{cases} \tag{4.1.26}$$

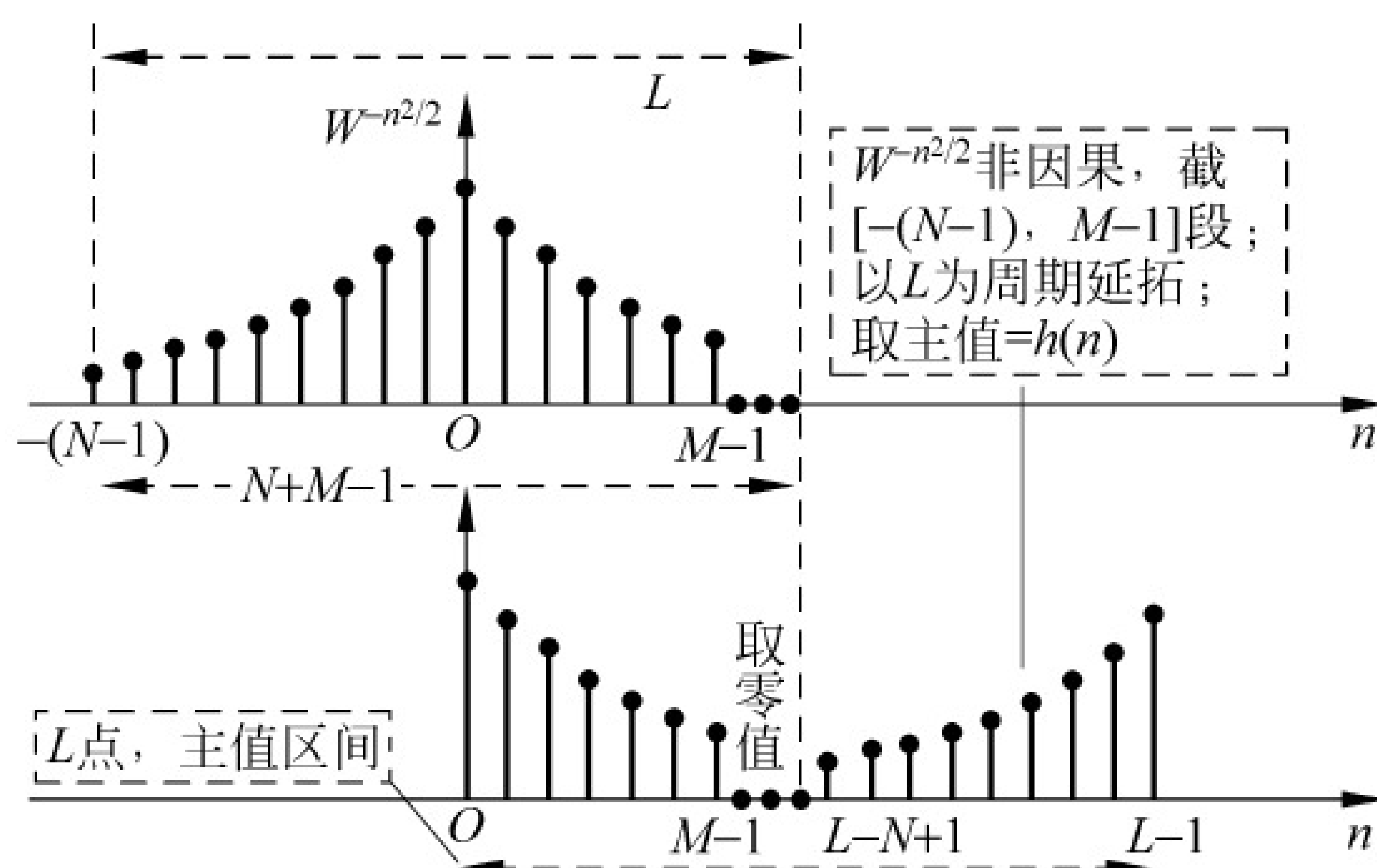


图 4-11 CZT 运算中 $h(n)$的构造

(3) 式(4.1.25a)所示长为 N 点的 $g(n)$后补零成 L 点序列。

(4) 可用 FFT 计算 $g(n)$、$h(n)$的 L 点 DFT：$G(r)$,$H(r)$,$r=0,1,2,\cdots,L-1$。

(5) 计算频域序列 $G(r)$、$H(r)$的乘积：$Q(r)=H(r)G(r)$,$r=0,1,2,\cdots,L-1$。

(6) 计算 $Q(r)$的 L 点 IFFT,得 $h(n)$、$g(n)$的 L 点圆周卷积 $q(n)$：

$$h(n)\textcircled{L}g(n)=q(n)=\frac{1}{L}\sum_{r=0}^{L-1}H(r)G(r)e^{j\frac{2\pi}{L}nr},\quad n=0,1,2,\cdots,L-1 \tag{4.1.27}$$

(7) 取 $q(n)$的前 M 个值,乘以相应的因子 $W^{\frac{n^2}{2}}$,就是所要求的 M 点 CZT,即

$$X(z_n)=W^{\frac{n^2}{2}}q(n),\quad n=0,1,\cdots,M-1 \tag{4.1.28}$$

$g(n)$波形的构造、$q(n)$的前 M 个值如图 4-12 所示。

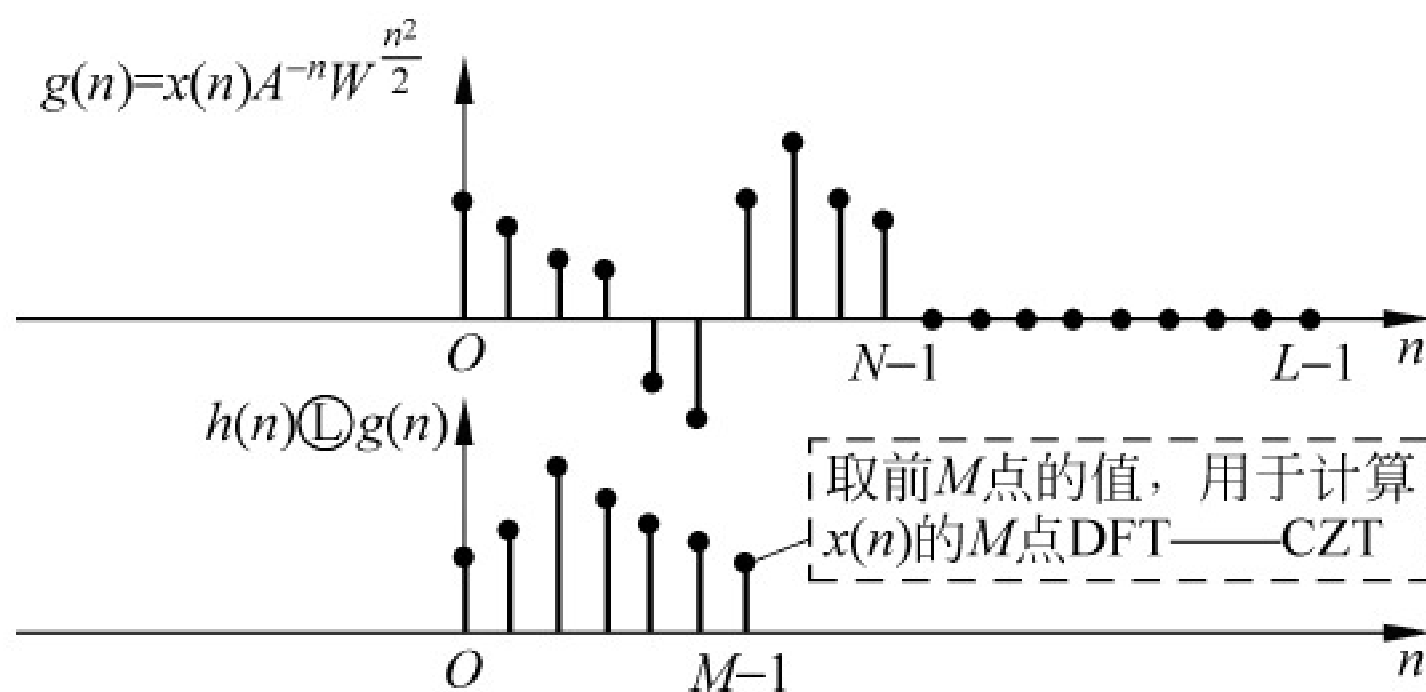


图 4-12 CZT 运算中 $g(n)$的构造,L 点圆周卷积示意

快速 CZT 的实现结构框图如图 4-13 所示。

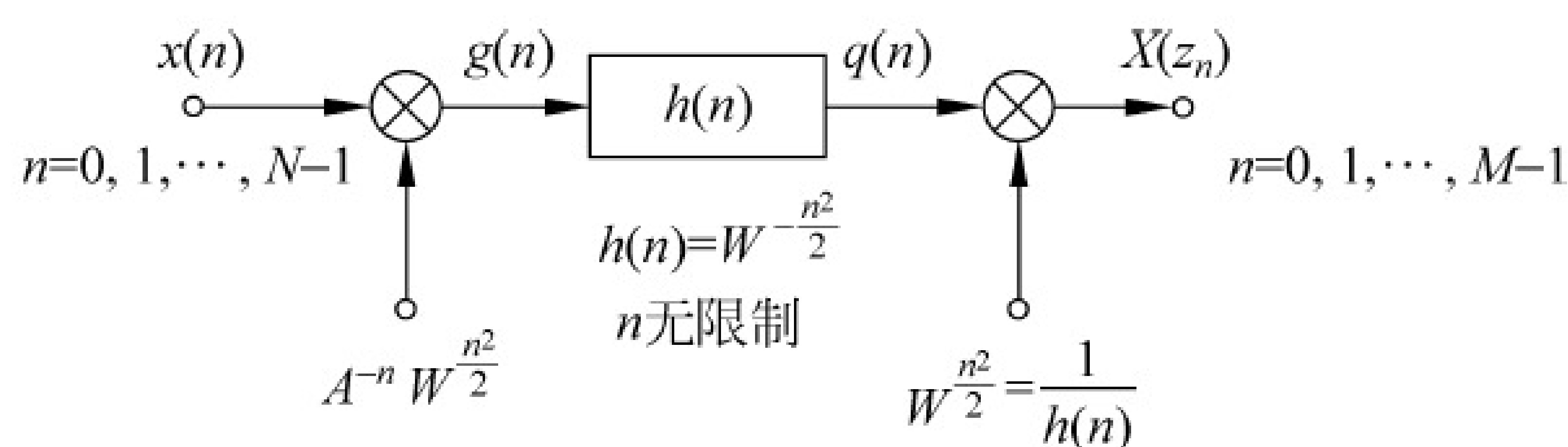


图 4-13　快速 CZT 的实现结构框图

4. ZFFT

频率扩展(放大镜)式 FFT(zoom FFT，ZFFT)通过复指数信号调制，把感兴趣的一段窄频段移到零频附近，并进行降采样(等效于采样频率 f_s 降低)后再进行 N 点 DFT(FFT)，等效的计算频率分辨率$\left(\dfrac{f_s}{N}\right)$指标提高，是提高谱分析频率分辨率的典型的算法之一，常用于高分辨率分析、测量仪器。ZFFT 算法的实现结构如图 4-14 所示。

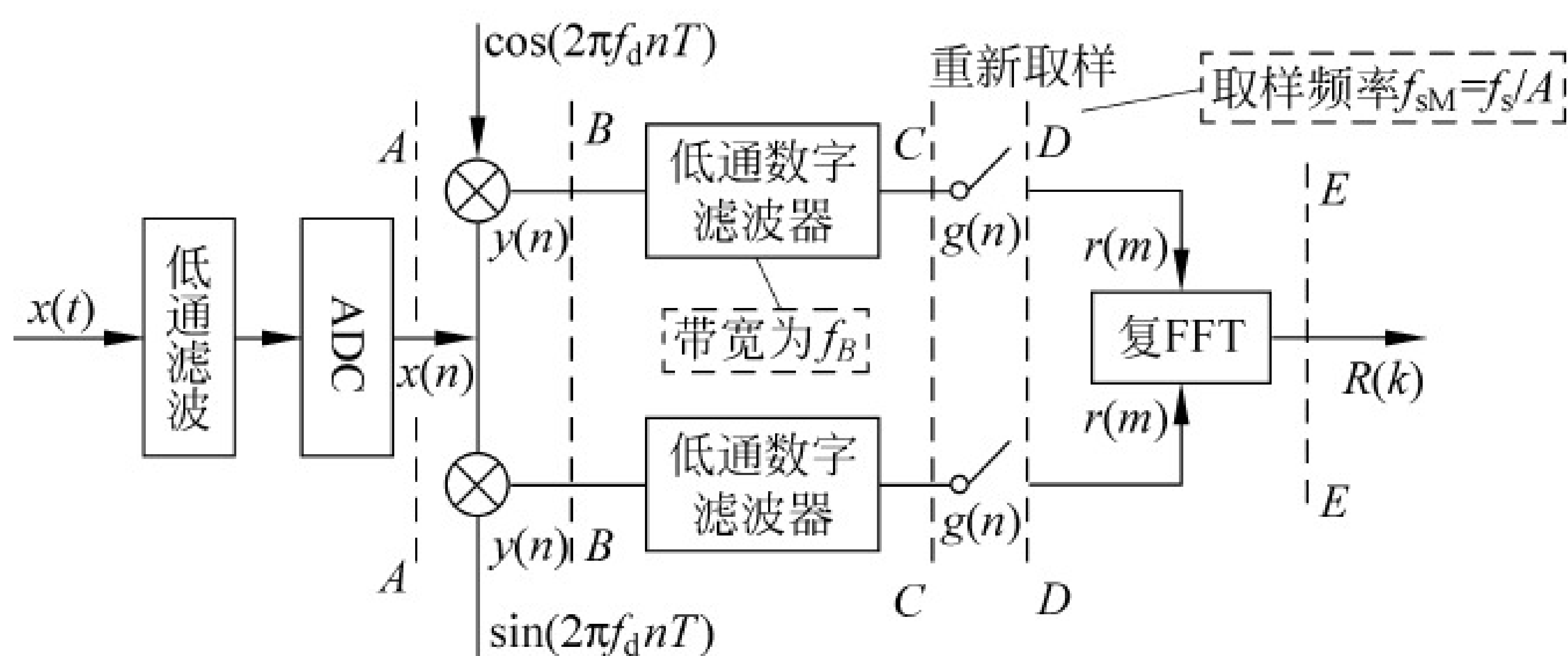


图 4-14　ZFFT 算法的实现结构

4.1.6　离散哈特莱变换

离散哈特莱变换(discrete Hartley transform，DHT)对 N 点实序列进行线性变换，得到 N 个实数。相对一般 DFT 的复序列变换，DHT 可节省一半的存储空间。实序列 $x(n)$的 N 点 DHT 的 N 个实数与该序列的$\dfrac{N}{2}$个 DFT 复值 $X(k)$有简单的关系。用 DHT 实现 DFT 时运算效率提高近一倍。

1. DHT 的定义

设 $x(n)$，$n=0,1,\cdots,N-1$ 为实序列。DHT 和逆 DHT(IDHT)分别定义为

$$X_H(k)=\mathrm{DHT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right),\quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.29}$$

$$x(n)=\mathrm{IDHT}[X_H(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_H(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right),\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.30}$$

式(4.1.29)和式(4.1.30)中，$\cos\alpha=\cos\alpha+\sin\alpha$，为实函数。

2. DHT 和 DFT 的关系

若将实序列 $x(n)$ 的 N 点 DHT $X_H(k)$ 分解为奇对称和偶对称分量之和，如式(4.1.31)所示。

$$X_H(k) = X_{He}(k) + X_{Ho}(k), \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.31}$$

式(4.1.31)中 $X_H(k)$ 具有圆周对称性，故 $X_{He}(k)$ 和 $X_{Ho}(k)$ 可按式(4.1.32a)和式(4.1.32b)计算。

$$X_{He}(k) = \frac{1}{2}[X_H(k) + X_H(N-k)], \quad k = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{4.1.32a}$$

$$X_{Ho}(k) = \frac{1}{2}[X_H(k) - X_H(N-k)], \quad k = 0,1,2,\cdots,\frac{N}{2} \tag{4.1.32b}$$

$x(n)$ 的 N 点 DFT $X(k)$ 和 $X_H(k)$ 有如式(4.1.33)所示关系。

$$X(k) = X_{He}(k) - jX_{Ho}(k), \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.33}$$

考虑到式(4.1.32a)和式(4.1.32b)的特性，可以在求出 N 点 DFT 一半的序列值后，利用实序列 DFT 的共轭对称性，快速求另一半 DFT 值。

3. DHT 的性质

用符号“$x(n)\leftrightarrow X_H(k)$”表示 $X_H(k)=\mathrm{DHT}[x(n)]$。

1) 线性性

若 $x(n)\leftrightarrow X_H(k)$，$y(n)\leftrightarrow Y_H(k)$，则

$$ax(n) + by(n) \leftrightarrow aX_H(k) + bY_H(k) \tag{4.1.34}$$

2) 逆序列 $x(N-n)$ 的 DHT

若 $x(n)\leftrightarrow X_H(k)$，则

$$x(N-n) \leftrightarrow X_H(N-k) \tag{4.1.35}$$

且

$$X_H(N-k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn\right) - \sin\left(\frac{2\pi}{N}kn\right)\right], \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1 \tag{4.1.36}$$

3) 循环移位性质

若 $x(n)\leftrightarrow X_H(k)$，则

$$x((n-n_0))_N R_N(n) \leftrightarrow X_H(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn_0\right) + X_H(N-k)\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn_0\right) \tag{4.1.37a}$$

$$x((n+n_0))_N R_N(n) \leftrightarrow X_H(k)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kn_0\right) - X_H(N-k)\sin\left(\frac{2\pi}{N}kn_0\right) \tag{4.1.37b}$$

4) 奇偶性

DHT 序列的奇偶性和原时域序列 $x(n)$ 的奇偶性一致。

5) 循环卷积定理

若 $x(n)\leftrightarrow X_H(k)$，$y(n)\leftrightarrow Y_H(k)$，则

$$x(n) \circledN y(n) \leftrightarrow Y_H(k)X_{He}(k) + Y_H(N-k)X_{Ho}(k) \tag{4.1.38a}$$

或

$$x(n) \circledN y(n) \leftrightarrow X_H(k)Y_{He}(k) + X_H(N-k)Y_{Ho}(k) \tag{4.1.38b}$$

当 $x(n)$ 或者 $y(n)$ 是偶对称序列，$X_H(k)=X_{He}(k)+X_{Ho}(k)$ 或 $Y_H(k)=Y_{He}(k)+Y_{Ho}(k)$ 偶对称，有 $X_{Ho}(k)=0$ 或 $Y_{Ho}(k)=0$，则

$$x(n) \circledN y(n) \leftrightarrow Y_H(k)X_H(k) \tag{4.1.39}$$

4.2 习题解答

4-1 已知 $X(k)$和 $Y(k)$分别是两个 N 点实序列 $x(n)$和 $y(n)$的 N 点 DFT，为提高运算效率，试设计用一次 N 点 IFFT 来求解 $x(n)$和 $y(n)$。

解：因为 $x(n)$和 $y(n)$分别为两个 N 点实序列，所以 $X(k)$和 $Y(k)$为共轭对称序列，$\mathrm{j}Y(k)$为共轭反对称序列。可用 $X(k)$和 $\mathrm{j}Y(k)$构成复序列 $F(k)$的共轭对称分量和共轭反对称分量，即

$$F(k) = X(k) + \mathrm{j}Y(k) = F_{\mathrm{ep}}(k) + F_{\mathrm{op}}(k)$$

计算一次 IFFT 得

$$f(n) = \mathrm{Re}[f(n)] + \mathrm{jIm}[f(n)]$$

由 DFT 的共轭对称性可知

$$\mathrm{Re}[f(n)] = \mathrm{IDFT}[F_{\mathrm{ep}}(k)] = \mathrm{IDFT}[X(k)] = x(n)$$

$$\mathrm{jIm}[f(n)] = \mathrm{IDFT}[F_{\mathrm{op}}(k)] = \mathrm{IDFT}[\mathrm{j}Y(k)] = \mathrm{j}y(n)$$

所以

$$x(n) = \frac{1}{2}[f(n) + f^*(n)]$$

$$y(n) = \frac{1}{2\mathrm{j}}[f(n) - f^*(n)]$$

4-2 设 $x(n)$长度为 $2N$ 的有限长实序列，$X(k)$为 $x(n)$的 $2N$ 点 DFT。

(1) 试设计用一次 N 点 FFT 完成计算 $X(k)$的高效算法。

(2) 若已知 $X(k)$，试设计用一次 N 点 FFT 实现求 $x(k)$的 $2N$ 点 IDFT 运算。

解：

(1) 在时域对 $x(n)$按序号的偶数和奇数分别抽取，得到 $x_1(n)$和 $x_2(n)$：

$$x_1(n) = x(2n),\quad n = 0,1,2,\cdots,N-1$$

$$x_2(n) = x(2n+1),\quad n = 0,1,2,\cdots,N-1$$

根据 DIT-FFT 的思想，只要求得 $x_1(n)$和 $x_2(n)$的 N 点 DFT，再经过简单的一级蝶形运算就可得到 $x(n)$的 $2N$ 点 DFT，因为 $x_1(n)$和 $x_2(n)$均为实序列，所以根据 DFT 的共轭对称性，可用一次 N 点 DFT 求得 $X_1(k)$和 $X_2(k)$。具体方法如下：

令 $y(n)=x_1(n)+\mathrm{j}x_2(n)$，则计算一次 N 点 FFT 得

$$Y(k) = \mathrm{DFT}[y(n)],\quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

也就得到

$$X_1(k) = \mathrm{DFT}[x_1(n)] = Y_{\mathrm{ep}}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) + Y^*(N-k)]$$

$$\mathrm{j}X_2(k) = \mathrm{DFT}[\mathrm{j}x_2(n)] = Y_{\mathrm{op}}(k) = \frac{1}{2}[Y(k) - Y^*(N-k)]$$

故 $2N$ 点 $\mathrm{DFT}[x(n)]=X(k)$可由 $X_1(k)$和 $X_2(k)$得到

$$\begin{cases} X(k) = X_1(k) + W_{2N}^k X_2(k) \\ X(k+N) = X_1(k) - W_{2N}^k X_2(k) \end{cases},\quad k = 0,1,2,\cdots,N-1$$

这样，通过一次 N 点 FFT 计算就完成了计算 $2N$ 点 DFT。

(2) 与(1)方法相同，自行推导。

4-3 设现有一些按 8 点时间抽取的 FFT 芯片，如何利用这些芯片计算一个 24 点 DFT？

解：对时域序列 $x(n)$，其 24 点 DFT 定义是

$$X(k) = \sum_{n=0}^{23} x(n) W_{24}^{nk}$$

对 $x(n)$ 以因子 3 进行分解，就可以将这个 DFT 分解为如下的 3 个 8 点 DFT

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{7} x(3n) W_{24}^{3nk} + \sum_{n=0}^{7} x(3n+1) W_{24}^{(3n+1)k} + \sum_{n=0}^{7} x(3n+2) W_{24}^{(3n+2)k} \\ &= \sum_{n=0}^{7} x(3n) W_{8}^{nk} + W_{24}^{k} \sum_{n=0}^{7} x(3n+1) W_{8}^{nk} + W_{24}^{2k} \sum_{n=0}^{7} x(3n+2) W_{8}^{nk} \end{aligned}$$

所以，如果组成 3 个序列

$$\begin{aligned} f(n) &= x(3n), & n &= 0,1,2,\cdots,7 \\ g(n) &= x(3n+1), & n &= 0,1,2,\cdots,7 \\ h(n) &= x(3n+2), & n &= 0,1,2,\cdots,7 \end{aligned}$$

利用 8 点 FFT 芯片计算 DFT $F(k)$、$G(k)$和 $H(k)$，那么 $x(n)$的 24 点 DFT 就可以通过将 8 点 FFT 的输出组合起来求得，组合的方法如下：

$$X(k) = F(k) + W_{24}^{k} \cdot G(k) + W_{24}^{2k} H(k), \quad k = 0,1,2,\cdots,7$$

考虑到 8 点 DFT 隐含有周期为 8 的周期性，所以，$x(n)$的 24 点 DFT 与 3 个 8 点 DFT $F(k)$、$G(k)$和 $H(k)$的关系可写成：

$$X(k) = F((k))_8 + W_{24}^{k} G((k))_8 + W_{24}^{(2k)\bmod 24} H((k))_8, \quad k = 0,1,2,\cdots,23$$

4-4 如果通用计算机平均每次复数乘需要 $100\mu s$，每次复数加需 $20\mu s$，则直接计算 $N=1024$ 点的 DFT 需要多少时间？用 FFT 计算需要多少时间？按这样计算，用 FFT 进行快速卷积对信号进行处理时，试估算可实现实时处理的信号最高频率。

解：$N=1024=2^{10}$。

(1) 直接计算一次 N 点 DFT 需要复数乘、复数加次数分别为 N^2、$N(N-1)$次。依题意，复数乘时间：

$$T_{\mathrm{d,M}} = 1024 \times 1024 \times 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} = 105\mathrm{s}$$

复数加时间：

$$T_{\mathrm{d,A}} = 1024 \times 1023 \times 20 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} = 21\mathrm{s}$$

直接计算总时间：

$$T_{\mathrm{d}} = T_{\mathrm{d,M}} + T_{\mathrm{d,A}} = 126\mathrm{s}$$

(2) 计算一次 N 点 FFT 需要复数乘、复数加次数分别为 $\frac{N}{2}\log_2 N$，$N\log_2 N$ 次。依题意，FFT 计算总时间：

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{F}} &= \frac{1024}{2} \times \log_2 2^{10} \times 100 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} + 1024 \times \log_2 2^{10} \times 20 \times 10^{-6}\,\mathrm{s} \\ &= 0.512\mathrm{s} + 0.2048\mathrm{s} = 0.7168\mathrm{s} \end{aligned}$$

(3) 用 FFT 进行快速卷积对信号进行处理时，假设系统单位采样脉冲响应的 N 点 DFT $H(k)$，$k=0,1,2,\cdots,N-1$，预先已经计算并存入内存待用，则需要一次 N 点 FFT 求

$X(k)$,频域的 N 次复数乘,一次 N 点 IFFT 得到输出 $y(n)$,所以 $N=1024$ 点的快速卷积总耗时:

$$\begin{aligned}T_C &= 2T_F + N\times 100\times 10^{-6}\,\text{s}\\ &= 2\times 0.7168\text{s} + 1024\times 100\times 10^{-6}\,\text{s} = 1.536\text{s}\end{aligned}$$

每秒处理的采样点数(等效于采样频率)

$$f_s < \frac{1024}{1.536} = 666.67\text{Hz}$$

根据采样定理,可实现实时处理的信号最高频率

$$f_{\max} < \frac{f_s}{2} = \frac{666.67}{2}\text{Hz} = 333.3\text{Hz}$$

实际应用中,$F_{\max}$还要更小。因为实际工程中,采样频率一般高于奈奎斯特采样率;如用重叠相加法处理长序列的快速卷积,重叠部分要计算两次;重叠部分的长度与处理系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$的长度有关;一般还要考虑存取数据和指令周期的时间开销。

4-5 如果将通用计算机换成专用单片机 TMS320 系列,计算一次复数乘需要 200ns,每次复数加需 50ns,试重复第 4-4 题的问题。

解:类似 4-4 题的分析

(1) 直接计算一次 $N=1024$ 点 DFT 需要时间:

$$T_d = 1024\times 1024\times 200\times 10^{-9}\,\text{s} + 1024\times 1023\times 50\times 10^{-9}\,\text{s} = 0.2098\text{s}$$

(2) 计算一次 $N=1024$ 点 FFT 需要时间:

$$\begin{aligned}T_F &= \frac{1024}{2}\times \log_2 2^{10}\times 200\times 10^{-9}\,\text{s} + 1024\times \log_2 2^{10}\times 50\times 10^{-9}\,\text{s}\\ &= 1.536\times 10^{-3}\,\text{s} = 1.536\text{ms}\end{aligned}$$

(3) $N=1024$ 点的快速卷积总耗时:

$$\begin{aligned}T_C &= 2T_F + N\times 200\times 10^{-9}\,\text{s}\\ &= 2\times 1.536\times 10^{-3}\,\text{s} + 1024\times 200\times 10^{-9}\,\text{s} = 3.2786\times 10^{-3}\,\text{s}\end{aligned}$$

可实现实时处理的信号最高频率

$$F_{\max} < \frac{f_s}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{N}{T_C} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1024}{3.2786\times 10^{-3}}\text{Hz} = 156\text{kHz}$$

可见,用 DSP 专用芯片大大地提高了信号处理速度,机器周期小于 1ns 的专用 DSP 处理芯片也已上市,可处理更高的信号频率;也可以说处理信号的带宽可以更高。

4-6 已知序列 $x(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)+\delta(n-3)$。

(1) 试用 FFT,求 $x(n)$的 4 点 DFT;

(2) 若 $y(n)$是 $x(n)$与它本身的 4 点圆周卷积,求 $y(n)$及其 4 点 DFT $Y(k)$;

(3) 设 $h(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+2\delta(n-3)$,求 $x(n)$与 $h(n)$的 4 点圆周卷积。

解:以 DIF-FFT 算法为例。

(1) 4 点 DIF-FFT 算法流程如图 4-15 所示。

图 4-13 中,$W_4^1=e^{-j\frac{2\pi}{4}}=-j$。输出结果整序后得

$$X(k) = [4,\ -1+j,\ 2,\ -1-j],\quad k=0,1,2,3$$

(2) 依题意:$y(n)=x(n)④x(n)$。

根据时域圆周卷积定理,$y(n)$的 4 点 DFT,可由 $X(k)$的对应 k 相乘得

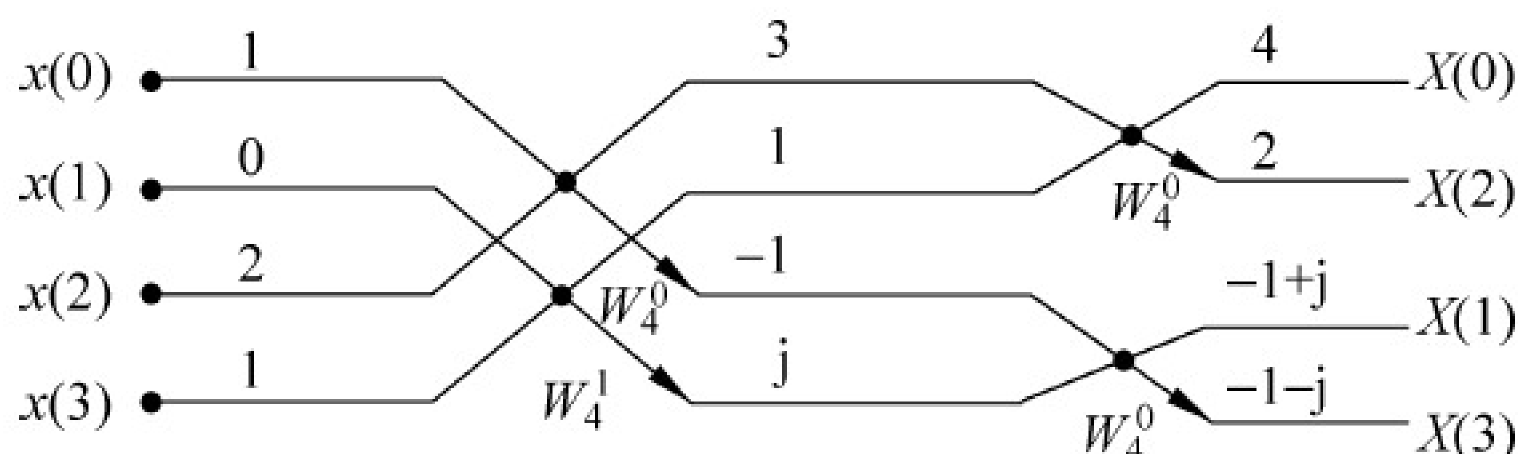


图 4-15 题 4-6 解图一

$$Y(k)=X(k)X(k)=[4,-1+\mathrm{j},2,-1-\mathrm{j}]\times[4,-1+\mathrm{j},2,-1-\mathrm{j}]$$
$$=[16,-2\mathrm{j},4,2\mathrm{j}],\quad k=0,1,2,3$$

因为通过 DFT 可以计算 IDFT,如图 4-16 所示 DIF-FFT 流程,可以很快求 $Y(k)$的 4 点 IDFT 得

$$y(n)=[5,4,5,2]$$

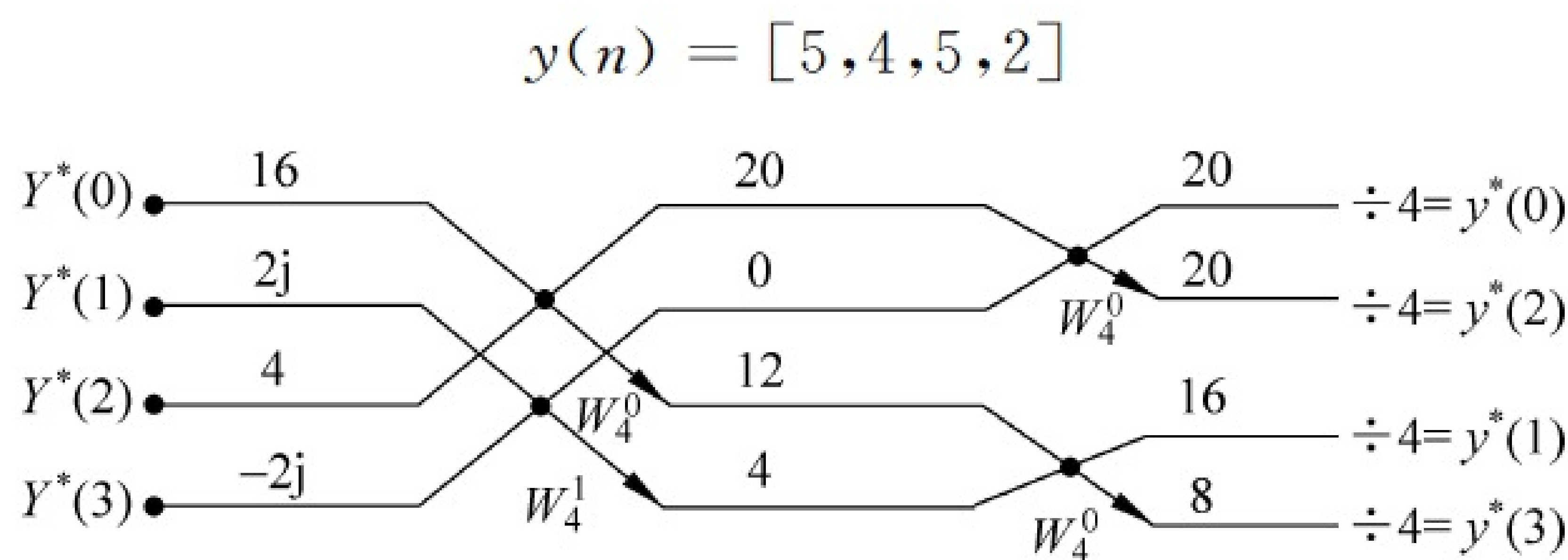


图 4-16 题 4-6 解图二

(3) 具体过程略。请读者参考(1)(2)的思路,自己求解。

$$x(n)④h(n)=[2,5,4,5]$$

4-7 设数字系统的单位采样脉冲响应 $h=[1,2,-1]$。试用重叠相加法,通过 4 点圆周卷积,求输入信号 $x(n)=[1,1,2,1,2,2,1,1,1]$时系统的输出 $y(n)$。并用线性卷积结果进行验证。

解:

(1) 分段卷积的本质是用各子数据段经过数字系统,逐段和系统单位采样脉冲响应 $h(n)$线性卷积,最终得到长输入信号经过数字系统的输出。

(2) 为了进行快速线性卷积,各子段的卷积是通过可以快速计算的“圆周卷积”实现的;因此,在给定圆周卷积的点数 N(通常对应着 FFT 的点数)、系统 $h(n)$长度 M 条件下,各子数据段的长度 L 应该合适,即 $N\geqslant L+M-1$,圆周卷积结果才能与子数据段和系统 $h(n)$的线性卷积结果一致。

(3) “重叠相加”法的分段卷积,因为相邻子段卷积结果重叠部分要相加,所以只要最后一段有实际样本数据,就要考虑其卷积结果的影响。

依题意,长序列的分段长度 $L\leqslant N-M+1=4-3+1=2$ 点。所以 2 点一段,$x(n)$应该分成 5 段:

$$x_0(n)=[1,1];\ x_1(n)=[2,1];\ x_2(n)=[2,2];\ x_3(n)=[1,1];\ x_4(n)=[1,\ 0]$$

将 $h(n)$和 $x_i(n)$,$i=0,1,2,3,4$ 分别后补零得长为 4 的序列,计算 4 点圆周卷积:

$$y_i(n)=h(n)④x_i(n),\quad i=0,1,2,3,4$$

按“重叠相加”法的规则得最终结果。

分段卷积过程略。请读者参考教材自己练习。最终 11 点输出样值:

$$y(n)=[1,3,3,4,2,5,3,1,2,1,-1]$$

4-8 设数字系统的单位采样脉冲响应 $h=[1,2,-1,-1]$。试用重叠保留法，通过6点圆周卷积，求输入信号 $x(n)=[1,1,2,1,2,2,1,1,0,1]$时，系统的输出 $y(n)$；并用线性卷积结果进行验证。

解：依题意，长序列的分段长度 $L\leqslant N-M+1=6-4+1=3$ 点。所以3点一段，$x(n)$应该分成4段。

分段卷积过程略。请读者参考教材自己练习。最终13点输出样值：

$$y(n)=[1,3,3,3,1,3,2,-1,-1,-1,1,-1,-1]$$

4-9 $X(e^{j\omega})$表示长度为10的有限长序列 $x(n)$的傅里叶变换。我们希望计算 $X(e^{j\omega})$在频率 $\omega_k=\dfrac{2\pi k^2}{100}$，$k=0,1,\cdots,9$ 时的10个采样。计算时不能采用先算出比要求数多的采样然后再丢掉一些的方法。讨论采用下列各方法的可能性：

(1) 直接利用10点快速傅里叶变换算法。

(2) 利用线性调频 z 变换算法。

解：

(1) 若直接利用10点快速傅里叶变换算法，则根据DTFT定义，在给定频率处的谱值为：

$$X(e^{j\omega_k})=\sum_{n=0}^{9}x(n)e^{-j\omega_k n}=\sum_{n=0}^{9}x(n)e^{-j\frac{2\pi k^2 n}{100}},\quad k=0,1,2,\cdots,9$$

当给定 k 时，上述变换总是可以计算，得到频率 ω_k 处的谱值。下面利用FFT减少运算量的思路，分析上述变换快速实现时的复数乘的可能运算量。

将 n 为偶数与 n 为奇数的部分分开，可得

$$\begin{aligned}X(e^{j\omega_k})&=\sum_{n\text{为偶数}}x(n)e^{-j\frac{2\pi k^2 n}{100}}+\sum_{n\text{为奇数}}x(n)e^{-j\frac{2\pi k^2 n}{100}}\\&=\sum_{r=0}^{4}x(2r)e^{-j\frac{2\pi k^2(2r)}{100}}+\sum_{r=0}^{4}x(2r+1)e^{-j\frac{2\pi k^2(2r+1)}{100}}\\&=\sum_{r=0}^{4}x(2r)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}+e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}}\sum_{r=0}^{4}x(2r+1)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}\\&=G_0(k)+e^{-j\frac{2\pi k^2}{100}}G_1(k),\quad k=0,1,2,\cdots,9\end{aligned}$$

式中，

$$\begin{aligned}G_l(k)&=\sum_{r=0}^{4}x(2r+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}\\&=\sum_{r\text{为偶数}}x(2r+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}+\sum_{r\text{为奇数}}x(2r+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 r}{50}}\\&=\sum_{s=0}^{2}x[2(2s)+l]e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}2s}+\sum_{s=0}^{1}x[2(2s+1)+l]e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}(2s+1)}\\&=\sum_{s=0}^{2}x(4s+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}}+e^{-j\frac{2\pi k^2}{50}}\sum_{s=0}^{1}x(4s+2+l)e^{-j\frac{2\pi k^2 s}{25}},\quad l=0,1\end{aligned}$$

对于每个 k 值，计算 $G_l(k)$要求 $8+8=16$ 次实数乘法（$s=0$ 时没有乘法）。

对于每个 k 值，计算 $X(e^{j\omega_k})$ 要求 $2\times16+4=36$ 次实数乘法。因此对 10 点傅里叶变换，总共需要 360 次实数乘法。

(2) 如考虑利用线性调频 z 变换算法，则根据 CZT 定义

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{9}x(n)A^{-n}W^{nk},\quad k=0,1,2,\cdots,9$$

$A=A_0e^{j\theta_0}$，$W=W_0e^{-j\phi_0}$ 均应为常数。

CZT 的采样复 z 点 $z_k=AW^{-k}=A_0e^{j\theta_0}[W_0e^{-j\phi_0}]^{-k}$，对应着频率点 $\omega_k'=\theta_0+k\phi_0$，是序号 k 的线性函数。题目要求的频点是 k 的二次函数，故不存在常数 θ_0、ϕ_0，可以使 ω_k' 的值取到题目所要求的 ω_k。所以不能利用线性调频 z 变换算法。

第5章 数字滤波器的结构

CHAPTER 5

5.1 重点内容

5.1.1 概述

1. 数字滤波器

数字滤波器用有限精度算法进行信号滤波处理，它利用离散时间 LTI 系统的特性对输入序列的波形或频谱进行加工处理，将输入数字序列通过一定的运算后转变为输出数字序列，从而达到改变信号频谱的目的。

数字滤波器可以用时域输入输出差分方程、单位采样脉冲响应以及系统函数等表示。研究实现方法，即运算结构时，一般采用方框图或信号流图表示系统。

2. 表示方法

数字滤波器的各种数学等效描述从不同的角度指出了其特性。

(1) 时域 I/O 差分方程：

$$y(n)=\sum_{j=0}^{M}b_jx(n-j)-\sum_{i=1}^{N}a_iy(n-i) \tag{5.1.1}$$

其中，$x(n)$、$y(n)$分别为数字系统的输入、输出序列；$\{a_i, i=1,2,\cdots,N;\ b_j, j=0,1,2,\cdots, M\}$为常数，也称为数字系统的结构参数。

(2) 卷积方程：

$$y(n)=\sum_{i=1}^{\infty}h(i)x(n-i) \tag{5.1.2}$$

其中，$x(n)$、$y(n)$分别为数字系统的输入、输出序列；$h(n)$为数字系统的单位采样脉冲响应。

(3) 单位采样脉冲响应：

$$h(n)=\{h(0),h(1),h(2),\cdots,h(M),\cdots\} \tag{5.1.3}$$

(4) 系统函数：

$$H(z)=\frac{\sum_{j=0}^{M}b_jz^{-j}}{1+\sum_{i=1}^{N}a_iz^{-i}} \tag{5.1.4}$$

(5) 频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} \tag{5.1.5}$$

(6) 零点、极点分布：

$$\{z_j, j = 1,2,\cdots,M; \quad p_i, i = 1,2,\cdots,N\}$$

零点 z_j、极点 p_i 可通过求解系统函数 $H(z)$分子多项式、分母多项式的零点得到。

(7) 网络结构图和相应的(状态变量分析)样值处理算法。

3. 分类

数字滤波器按其单位采样脉冲响应 $h(n)$的时间特性,分为两类：无限长脉冲响应(IIR)滤波器和有限长脉冲响应(FIR)滤波器。

IIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$包含无限个非零值,持续时间为无限长。时域 I/O 差分方程(或系统函数的分母多项式)中至少有一个系数 a_i 不为零,这类滤波器存在输出到输入的反馈,需要使用递归计算方法实现,一般表示如下。

时域 I/O 差分方程：

$$y(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$$

系统函数：

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

FIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$只包含有限个非零值,持续有限长时间。时域 I/O 差分方程(或系统函数的分母多项式)中系数 $a_i=0(i=1,2,\cdots,N)$,一般结构中没有输出到输入的反馈,主要为非递归型结构,具体表示如式(5.1.6)和式(5.1.7)所示。

时域 I/O 差分方程：

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-i) \tag{5.1.6}$$

系统函数：

$$H(z) = \sum_{i=0}^{M} b_i z^{-i} \tag{5.1.7}$$

5.1.2 信号流图表示网络结构

1. 基本运算单元

数字系统的基本运算单元有 3 种,即单位延迟器、常数乘法器和加法器。其方框图法和信号流图法表示如图 5-1 所示。

2. 信号流图

图 5-2 给出了一个信号流图的示意。相关术语总结如下。

(1) 节点：图 5-2(b)信号流图中圆点称为节点,每一节点都对应一个变量,或者代表一个信号。

(2) 支路：连接两个节点的有向线段称为支路。

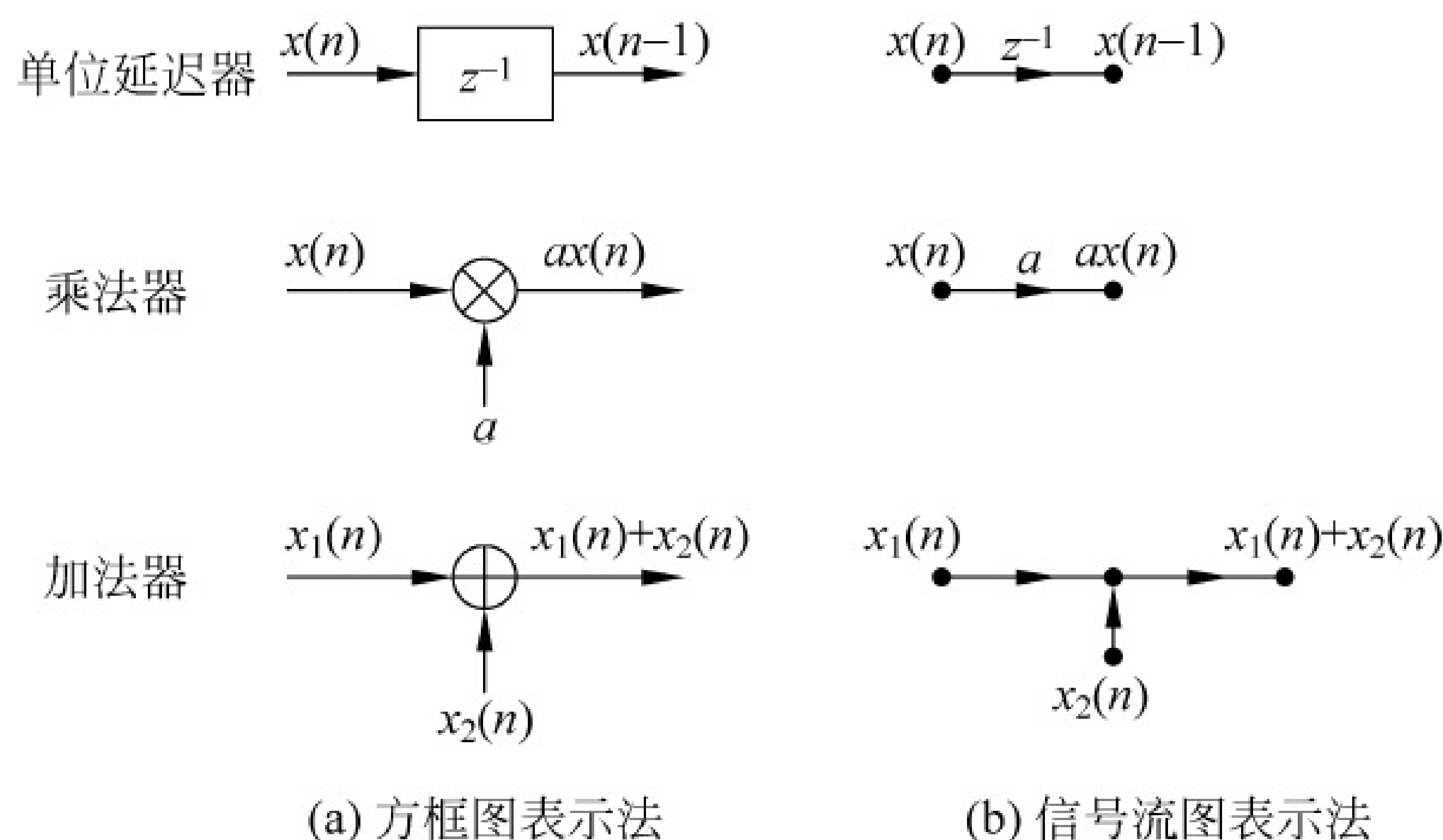


图 5-1　基本运算的方框图表示及信号流图表示

(3) 源节点：只有输出支路与之相连的节点，称为源节点或输入节点。

(4) 吸收节点：只有输入支路与之相连的节点，称为吸收节点或输出节点。

3. 基本信号流图

基本信号流图必须满足以下条件：

(1) 信号流图中所有支路都是基本的，即支路增益是常数或者是 z^{-1}。

(2) 信号流图环路中必须存在延迟支路。

(3) 信号流图中节点和支路的数目是有限的。

图 5-2(a)是基本信号流图，图中有两个环路，环路增益分别为 $-a_1z^{-1}$ 和 $-a_2z^{-2}$，且环路中都有延时支路。而图 5-2(b)不是基本信号流图，它不能决定一种具体的算法，不满足基本信号流图的条件。

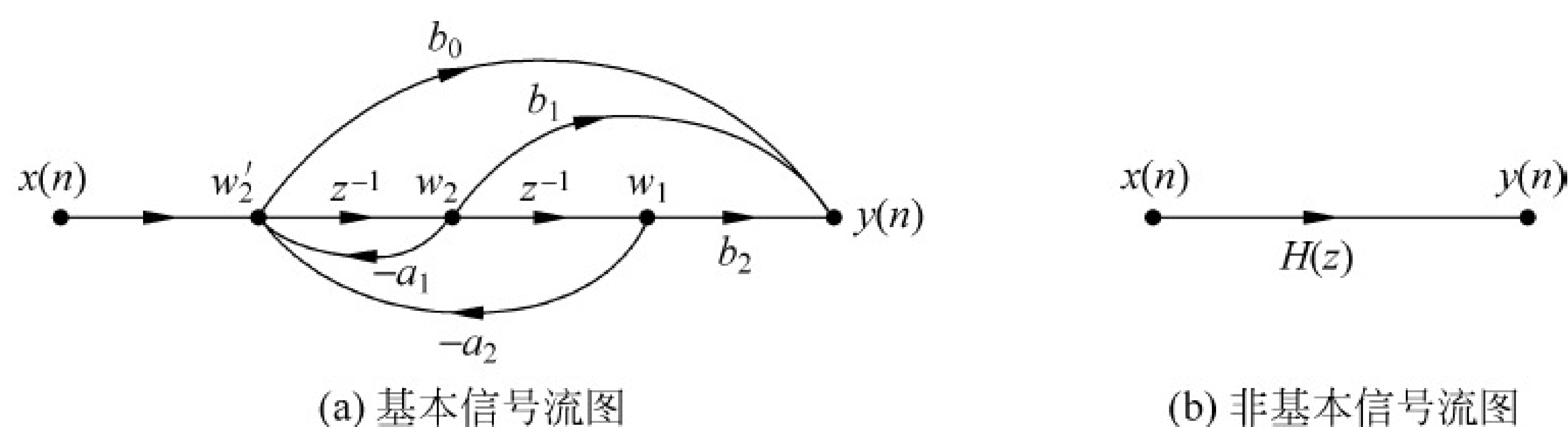


图 5-2　信号流图

5.1.3　IIR 滤波器的基本网络结构

1. 直接型 I

1) 二阶数字滤波器

系统函数一般如式(5.1.8)所示。

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \tag{5.1.8}$$

对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n)=-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2) \tag{5.1.9}$$

式(5.1.8)所示二阶 IIR 滤波器直接型 I 结构如图 5-3 所示，有如下特点：

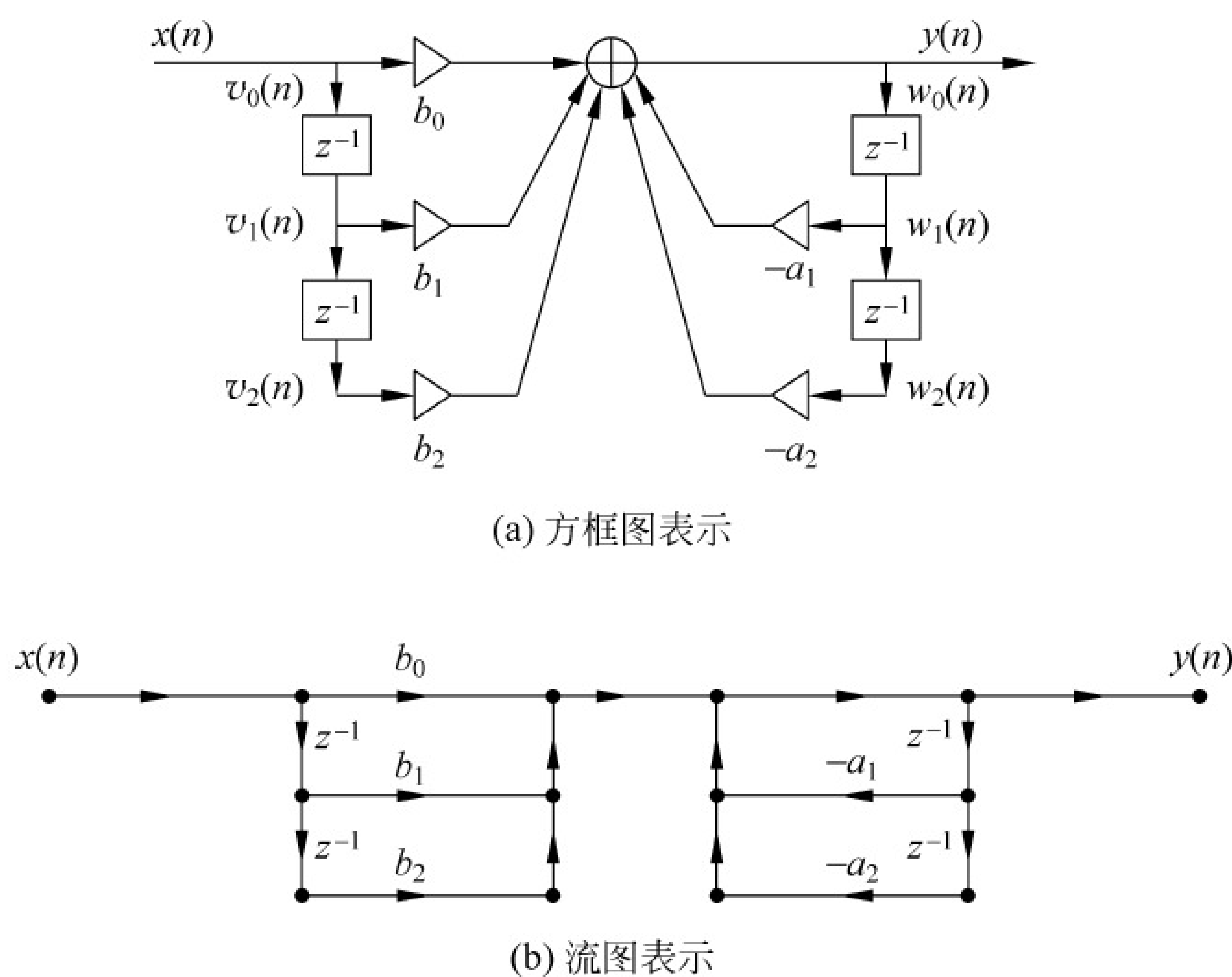
(1) 一个相加器把系统时域 I/O 差分方程右边的所有项加起来。加法器的输出是 $y(n)$。

(2) 前向分支加权乘因子 $b_j(j=0,1,2)$对应于 $H(z)$的分子多项式系数；在时域 I/O 差分方程中是与输入 $x(n)$有关的非递归项。

(3) 后向分支加权乘因子$-a_i(i=1,2)$对应于 $H(z)$的分母多项式非零次幂项系数；在时域 I/O 差分方程中是与输出 $y(n)$有关的反馈(递归)项。

(4) 已知直接型Ⅰ滤波器，给定输入序列 $x(n)$，求系统的响应 $y(n)$，可用样值迭代处理方法：数字滤波器按设定的算法，一次处理一个采样值 $x(n)$，同时送出一个相应的输出样值 $y(n)$。

> **特别提示：**直接型Ⅰ网络结构图中反馈加权乘因子是系统函数分母多项式非零次幂项系数的负数。



(a) 方框图表示

(b) 流图表示

图 5-3 IIR 滤波器直接型Ⅰ结构

2) 任意阶数字滤波器

一般系统函数如式(5.1.10)所示。

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}} \tag{5.1.10}$$

滤波器的阶数为 $\max\{M,N\}$，对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n)=-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)-\cdots-a_Ny(n-N)+b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_Mx(n-M) \tag{5.1.11}$$

当 $M=N$ 时，就是 N 阶 IIR 滤波器，其直接型Ⅰ的网络结构，只要在二阶 IIR 滤波器网络，即如图 5-2 所示的结构下面加更多的延迟环节和相应乘法器即可。

2. 直接型Ⅱ(典型型)

1) 二阶数字滤波器

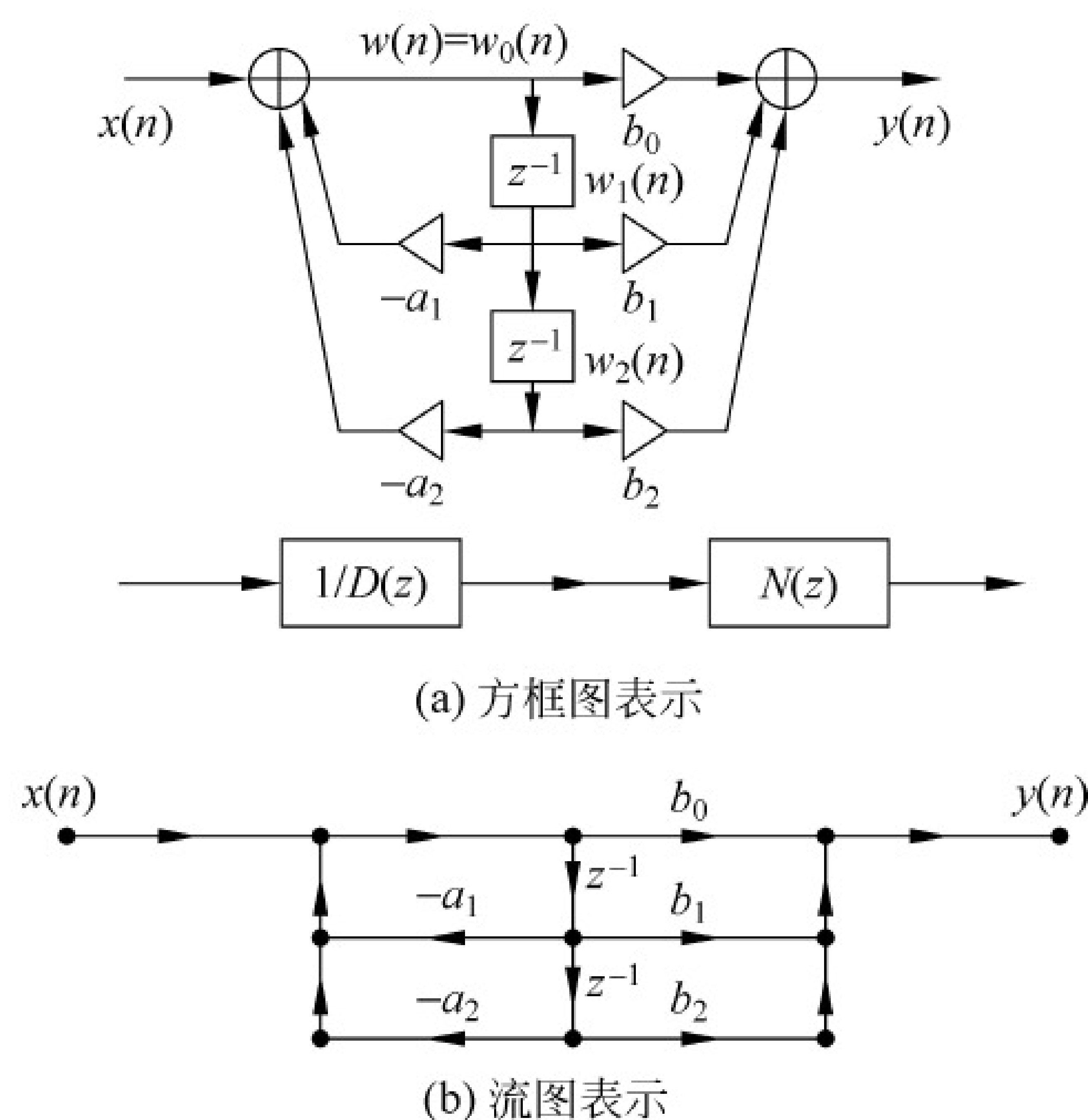
式(5.1.8)所示的数字滤波器系统函数 $H(z)$可等效地写成：

$$H(z)=\frac{1}{D(z)}\cdot N(z)=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}\cdot[b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}] \tag{5.1.12}$$

可整理对应的时域 I/O 差分方程，得到式(5.1.13)。

$$y(n)=\{b_0x(n)+b_1x(n-1)+b_2x(n-2)\}+\{-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)\} \tag{5.1.13}$$

根据式(5.1.12)所示的系统函数，可构造直接型Ⅱ(典型型)的二阶滤波器方框图，如图5-4(a)所示，信号流图如图5-4(b)所示。



(a) 方框图表示

(b) 流图表示

图 5-4　IIR 滤波器直接型Ⅱ结构

2）任意阶数字滤波器

一般系统函数 $H(z)$ 可表示为

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_Mz^{-M}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_Nz^{-N}}$$

阶数为 $\max\{M,N\}$。

对应的时域 I/O 差分方程为：

$$y(n)=\{-a_1y(n-1)-a_2y(n-2)-\cdots-a_Ny(n-N)\}+\{b_0x(n)+b_1x(n-1)+\cdots+b_Mx(n-M)\}$$

当 $M=N$ 时，就是 N 阶滤波器，其直接型Ⅱ的网络结构，只要在二阶滤波器典型网络(如图5-4所示的框图)下面加更多的延迟环节和相应乘法器即可。

3. 级联型

1）二阶节

实际物理可实现的系统函数 $H(z)$，是实系数的多项式的分式。相应的零点和极点是实数或共轭对。共轭对的零点、极点对应着实系数二次多项式。所以级联型的滤波器单级基本结构是“二阶滤波器”，称为“二阶节”(second order section，SOS)，可用直接型Ⅰ或典型型实现。

式(5.1.14)给出了一般 L 级 SOS 级联的数字滤波器的系统函数。

$$H(z)=A\prod_{i=1}^{L}H_i(z) \tag{5.1.14}$$

其中，$H_i(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_{i0}+b_{i1}z^{-1}+b_{i2}z^{-2}}{1+a_{i1}z^{-1}+a_{i2}z^{-2}}$，$i=1,2,\cdots$；$L$ 是第 i 级二阶节的系统函数；A 是归一化常数。

因为可把实际一阶系统看作二阶节的特例，所以式(5.1.14)所示的系统函数 $H(z)$分子分母多项式的实际阶数小于或等于 $2L$。级联型实现的数字滤波器方框图如图 5-5 所示。

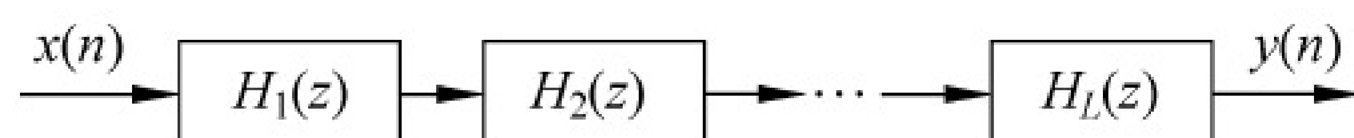


图 5-5　级联型 $H(z)$方框图

2）级联型滤波器结构特点

(1) 硬件实现时，可用一个二阶节"时分复用"，节省存储单元。

(2) 因为每一二阶节都对应一对共轭零点和一对共轭极点，所以可单独调整滤波器的零点、极点，从而方便地调整滤波器的频率响应。

(3) 级联次序不同，运算误差不同，且极间电平移动不同。极间输出电平太大，则滤波器运算可能溢出；太小，则输出信号的信噪比(SNR)太小。

4. 并联型

1）结构

把系统函数表示为实系数二阶多项式部分因式之和，则总系统函数是各二阶节表示的子系统的并联。

式(5.1.15)给出了 L 个 SOS 并联的数字滤波器的系统函数。

$$H(z)=H_1(z)+H_2(z)+\cdots+H_L(z) \tag{5.1.15}$$

其中，$H_i(z)$的系统函数如式(5.1.16)所示。每个 $H_i(z)$对应着一对共轭复极点，该 SOS 可用直接型Ⅰ或典型型实现。

$$H_i(z)=\frac{b_{i0}+b_{i1}z^{-1}+b_{i2}z^{-2}}{1+a_{i1}z^{-1}+a_{i2}z^{-2}} \tag{5.1.16}$$

式(5.1.15)所示系统输出的 z 变换可表示为

$$Y(z)=H_1(z)X(z)+H_2(z)X(z)+\cdots+H_L(z)X(z) \tag{5.1.17}$$

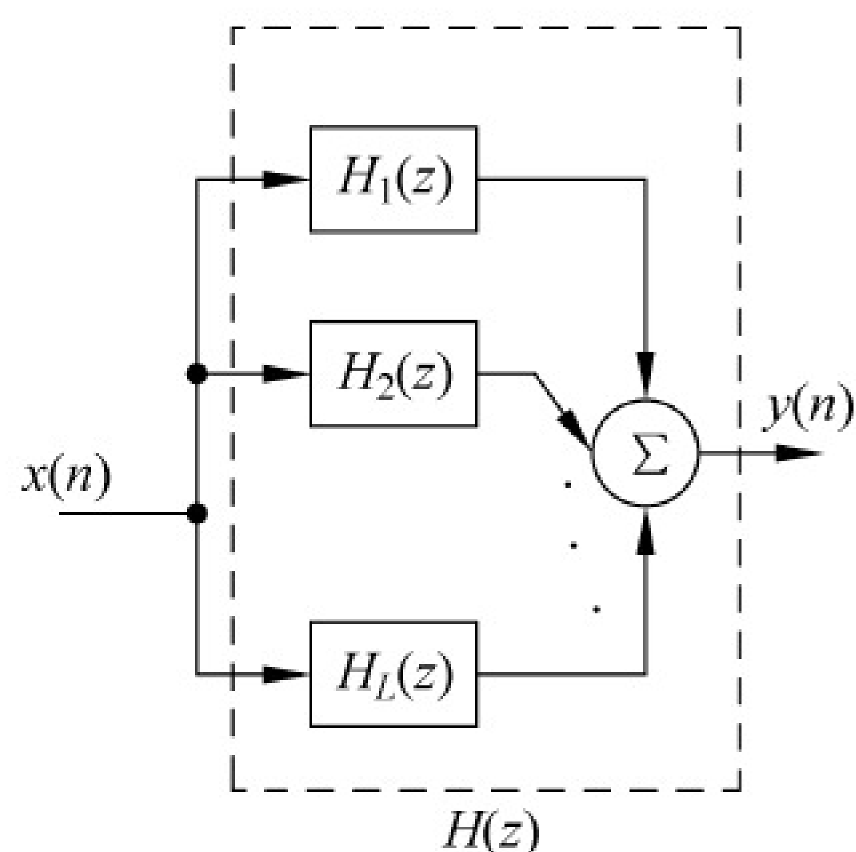


图 5-6　并联型 $H(z)$方框图

式(5.1.17)表明，输入序列 $x(n)$通过并联的 L 个子滤波器后，在输出端累加可得到总输出 $y(n)$。并联型实现的数字滤波器方框图如图 5-6 所示。

2）并联型滤波器特点

(1) 运算速度快，各子网络对输入同时计算，较之直接型、级联型结构，运算速度最高。

(2) 可单独调整极点。

(3) 各基本节的误差互不影响，较之直接型、级联型结构，累积运算误差最小。

5. 转置型

转置理论：把基本信号流图网络中所有支路的方向颠倒，且将输入 $x(n)$和输出 $y(n)$位置互换，则转置后结构的输入输出关系和原来的一样(系统函数保持不变)。

图 5-4(b)的直接型Ⅱ结构，转置后的网络如图 5-7 所示，画成输入在左方，输出在右方

的习惯形式，则如图 5-8 所示。

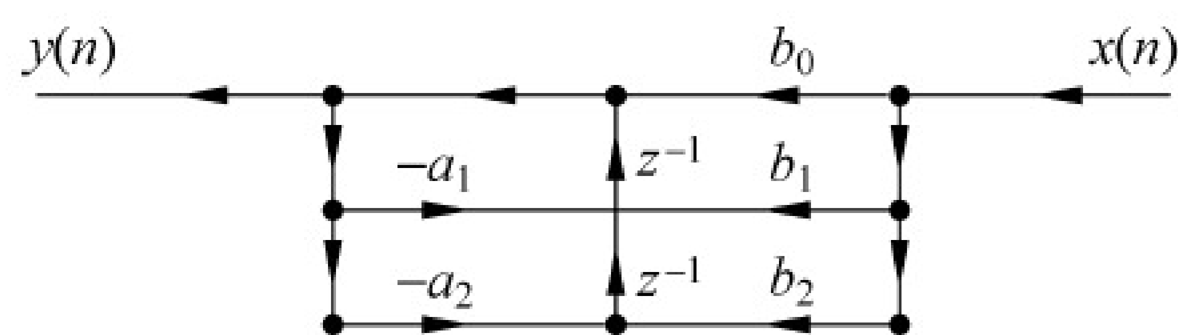


图 5-7　直接型Ⅱ结构的转置

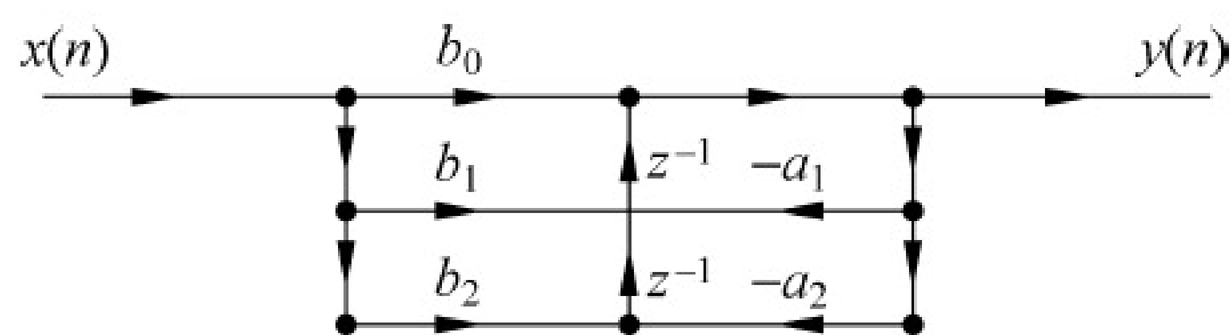


图 5-8　输入在左，输出在右

5.1.4　FIR 滤波器的基本结构

1. 直接型 FIR 滤波器

时域 I/O 差分方程为

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i)x(n-i) \tag{5.1.18}$$

直接型的 FIR 滤波器结构图如图 5-9 所示。

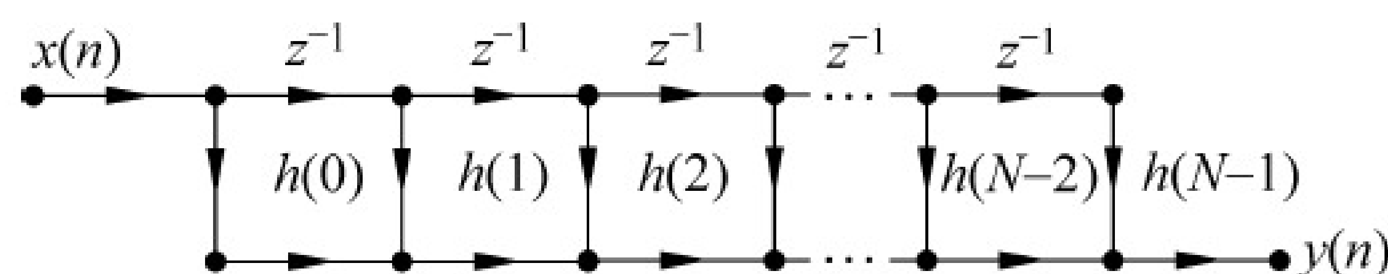


图 5-9　FIR 滤波器直接型结构

2. 级联型 FIR 滤波器

当 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$为实序列，则其系统函数非零的零点必然是实数或共轭对。如果把系统函数共轭成对的零点组合，对应着实系数的二次多项式，故 FIR 滤波器的系统函数可表示为

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2}) \tag{5.1.19}$$

其中，$\left[\dfrac{N}{2}\right]$表示取$\dfrac{N}{2}$的整数部分。$N$ 为奇数时，FIR 滤波器的级联结构如图 5-10 所示。

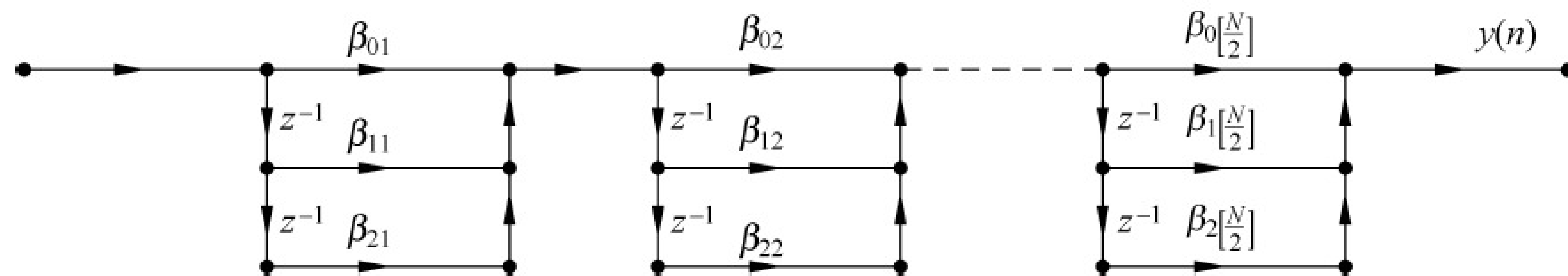


图 5-10　FIR 滤波器的级联型结构（N 为奇数）

3. 线性相位型 FIR 滤波器

1）线性相位特性

对不同频率 ω_i 的输入正弦波信号，产生的输出相移 φ_i 和正弦波的频率成线性关系，即满足式(5.1.20)，则称这个滤波器具有线性相位特性。

$$\varphi_i = k\omega_i \tag{5.1.20}$$

2）信号无频率失真

对于有线性相位特性的滤波器，当滤波器通带内通过多个频率信号时，输出各频率分量

的瞬时相位均满足：

$$\varphi_T(t) = \omega_i t + k\omega_i = \omega_i(t+k) \tag{5.1.21}$$

由式(5.1.21)可见，线性相移特性的斜率 k 可看成是所有输入频率分量经过该滤波器后，都产生了同样的时间延迟。因此线性相位滤波器通带内的信号传输无频率失真。

3）其他结构特点

单位采样脉冲响应长度为 N 的线性相位因果 FIR 滤波器，单位采样脉冲响应 $h(n)$ 是实的，相对 $\frac{N-1}{2}$ 一定是奇(或偶)对称的(N 为奇数时具有实际的对称中心点，N 为偶数时是虚的对称点)。网络结构只需 $\frac{N}{2}$(N 为偶数)或 $\frac{N+1}{2}$(N 为奇数)个乘法器进行相应的乘法运算。线性相位的 FIR 系统的结构如图 5-11 所示。

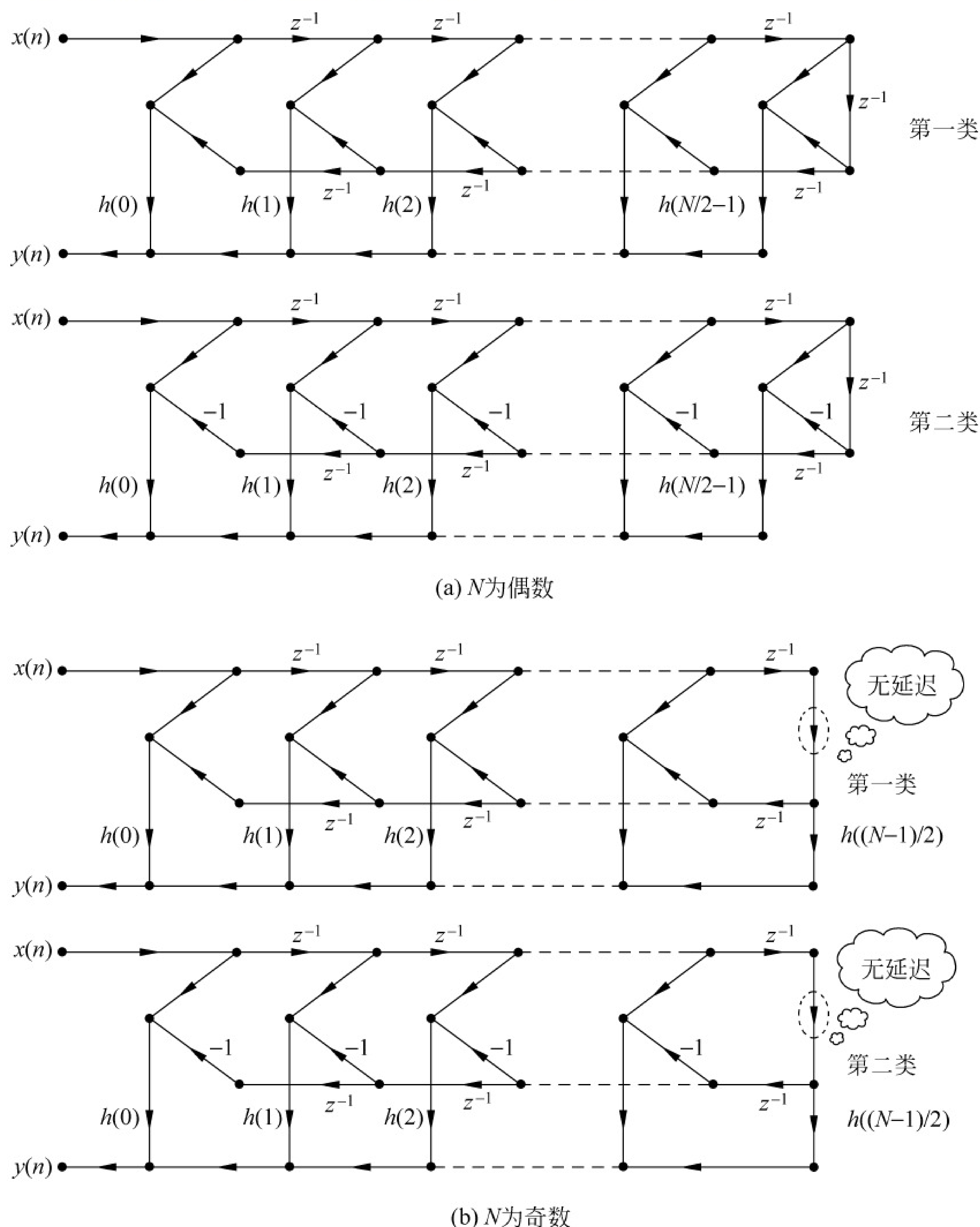


图 5-11　线性相位的 FIR 系统的结构

4. 频率采样型 FIR 滤波器

在满足频域采样定理的条件下，可以用 FIR 滤波器的系统频率响应在$[0,2\pi]$上的 N 点等间隔采样值 $H(k)$，重构数字系统的系统函数 $H(z)$，如式(5.1.22)所示。

$$H(z)=\frac{1}{N}(1-z^{-N})\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \tag{5.1.22}$$

其中，

$$H(k)=H(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

式(5.1.22)表明：$H(z)$由(梳状)FIR 滤波器 $H_c(z)=(1-z^{-N})$与 IIR 滤波器级联而成。这里的 IIR 滤波器是 N 个一阶网络 $H_k(z)$的并联：

$$\sum_{k=0}^{N-1}H_k(z)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

每个 $H_k(z)$均是一个无损耗的 IIR 谐振器，谐振频率分别是数字域频率$\frac{2\pi}{N}k$ rad。根据式(5.1.22)，可构造频率采样型 FIR 滤波器，其结构如图 5-12 所示。

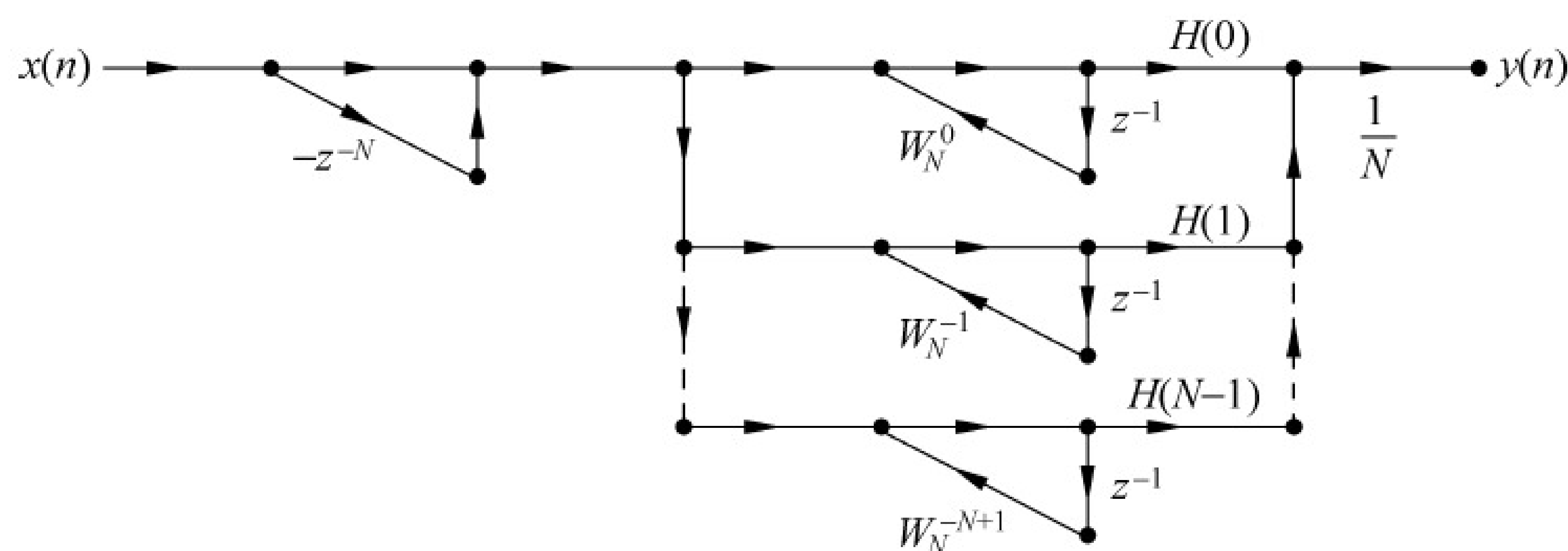


图 5-12 频率采样型 FIR 滤波器结构

1）梳状陷波滤波器(notch filter)

一般梳状滤波器的系统函数如式(5.1.23)所示。

$$H(z)=\frac{1-r^Nz^{-N}}{1-a^Nz^{-N}} \tag{5.1.23}$$

对应式(5.1.23)中参数 r、a 的不同取值情况，下面介绍两种典型的梳状滤波器。

(1)(梳状)FIR 陷波滤波器。式(5.1.23)中令 $a=0$，$r=1$，即得梳状 FIR 陷波滤波器的系统函数：

$$H(z)=1-z^{-N} \tag{5.1.24a}$$

其网络结构如图 5-13(a)所示。

由式(5.1.24a)可知，该滤波器在 z 平面单位圆上有 N 个等分的零点 $z_k=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ $(k=0,1,2,\cdots,N-1)$。在 z 平面上 $z=0$ 处有 N 阶极点。零点、极点分布如图 5-13(b)所示。

该梳状 FIR 陷波滤波器的频率响应、幅频响应分别如式(5.1.24b)、式(5.1.24c)所示。

$$H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega N} \tag{5.1.24b}$$

$$H(\omega)=|H(e^{j\omega})|=2\left|\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)\right| \tag{5.1.24c}$$

由式(5.1.24c)画出该滤波器的幅频响应曲线如图5-13(c)所示，滤波器幅频特性形状如梳子的齿，在频率$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$($k=0,1,2,\cdots,N-1$)处幅频响应为零，即“陷波”。

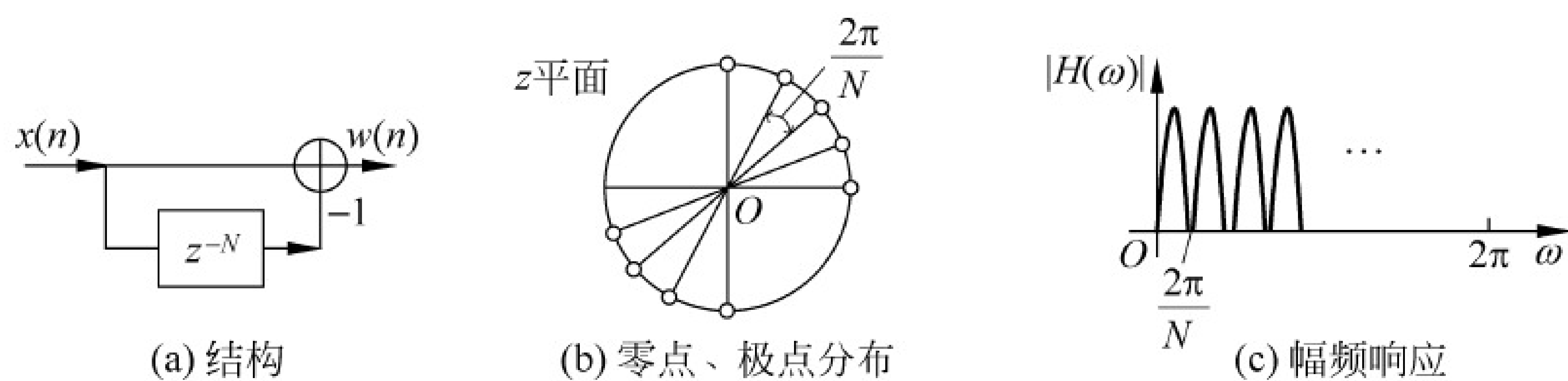


图5-13　FIR梳状滤波器结构，零点、极点分布和幅频响应

(2)（梳状）IIR陷波滤波器。式(5.1.23)中，当$a<1$，且接近于1，$r=1$时，即得梳状IIR陷波滤波器的系统函数：

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{1-a^Nz^{-N}} \tag{5.1.25}$$

其零点、极点分布如图5-14(a)所示。

由式(5.1.25)可知，该滤波器的N个零点$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}$($k=0,1,2,\cdots,N-1$)在$z$平面单位圆上；$N$个极点$az_k=a\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}$($k=0,1,2,\cdots,N-1$)在$z$平面单位圆内，接近单位圆。

z平面单位圆上旋转点$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$对零点、极点对($z_i,az_i$)的距离近似相等，其中$i=0,1,2,\cdots,N-1$，当单位圆上的点$z$旋转到频率为$\omega_i=i\frac{2\pi}{N}$弧度处，与该处零点$z_i$的距离等于零，对应的IIR滤波器的幅频响应为零。该梳状IIR陷波滤波器幅频响应如图5-14(b)所示，形状如梳子的齿，在频率$i\frac{2\pi}{N}$处有极小值，其他频率点近似平坦。

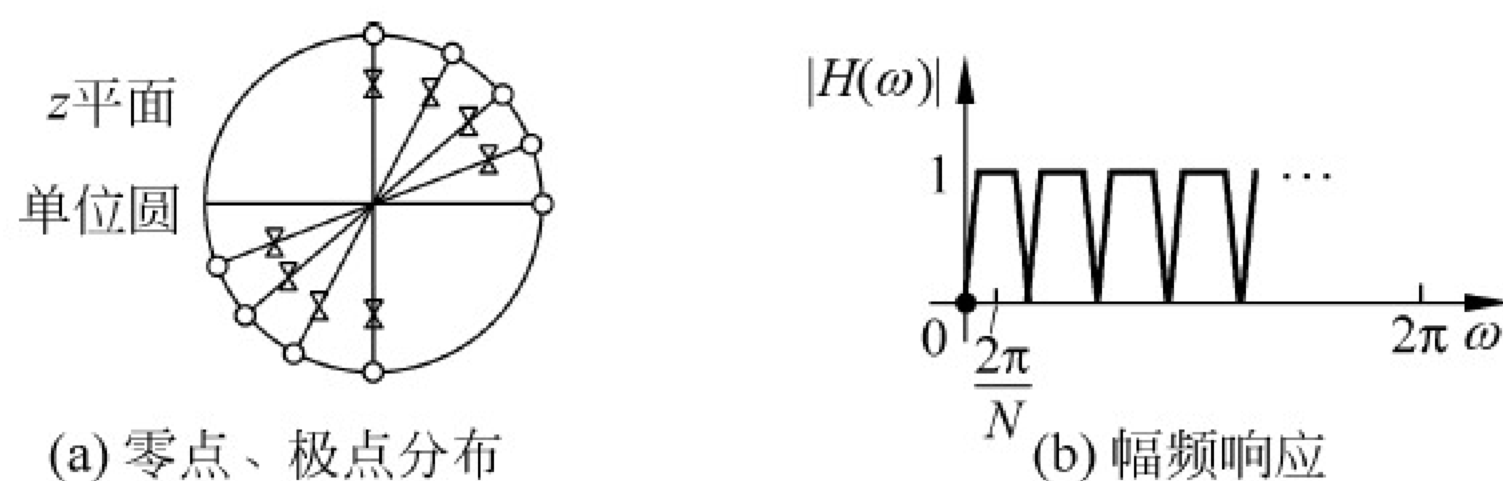


图5-14　IIR梳状滤波器零点、极点分布和幅频响应

2）无损耗IIR并联谐振器

一阶数字系统$H_k(z)=\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$中，常数$H(k)$是有限长单位采样脉冲响应为$h(n)$的FIR滤波器频率响应的频域采样值。一阶系统$H_k(z)$对频率$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$的响应为$\infty$，表现为系统谐振，无损耗。所以称该一阶系统是谐振频率为$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$的无损耗IIR谐振器。

无损耗IIR并联谐振器的系统函数如式(5.1.26)所示，是由多个谐振频率不同的一阶无损耗IIR谐振器并联构成，该系统函数在z域单位圆上共有N个极点：$z_k=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}k}$($k=0,1,2,\cdots N-1$)，说明式(5.1.26)所示系统对$N$个频率分量$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ ($k=0,1,2,\cdots N-1$)分别

谐振。

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \tag{5.1.26}$$

3）修正的频率采样型 FIR 滤波器

（1）特点。式(5.1.22)所示频率采样型 FIR 滤波器中，并联 IIR 谐振器在 z 平面单位圆上的 N 个极点与梳状滤波器在 z 平面单位圆上的 N 个零点一一对应相消。总体上，该 FIR 滤波器对频率分量 $\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$ 的响应正好是 $H(k)$，即其频率响应的频域采样值。

（2）稳定性问题。频率采样型 FIR 滤波器中，并联 IIR 谐振器的 N 个极点在 z 平面单位圆上的位置由 FIR 滤波器理论上的系数决定。系数的量化误差，使并联 IIR 滤波器谐振频点移动，可能使梳状滤波器的零点和并联 IIR 谐振器的极点不能完全对消，导致 FIR 滤波器系统不稳定。

（3）修正频率采样型 FIR 滤波器。为了改善上述频率采样型 FIR 滤波器在 z 平面单位圆上的零点、极点不能完全对消带来的系统不稳定问题，可以把并联 IIR 谐振器的极点设置在 z 平面上半径 r 小于 1，但近似于 1 的圆周上。相应的，梳状滤波器的零点也移到同一个半径小于 1 的圆周上，并与并联 IIR 谐振器的极点一一对消，得到"修正频率采样型 FIR 滤波器"，系统函数如式(5.1.27)所示。

$$H(z)\approx\frac{1}{N}(1-r^Nz^{-N})\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}},\quad r\leqslant 1 \tag{5.1.27}$$

其中，$H(z)$的极点、零点均为 $z_k=re^{j\frac{2\pi}{N}k}(k=0,1,2,\cdots,N-1)$，在 z 平面单位圆内。

（4）根据极点情况讨论修正频率采样型 FIR 滤波器的网络结构。修正频率采样型 FIR 滤波器的共轭复极点在半径为 r 的圆周上以实轴为轴成对称分布。将第 k 个与第$(N-k)$个一阶 IIR 谐振器合并为一个实系数的二阶滤波器网络 $H_k(z)$，如式(5.1.28)所示。网络结构如图 5-15 所示。

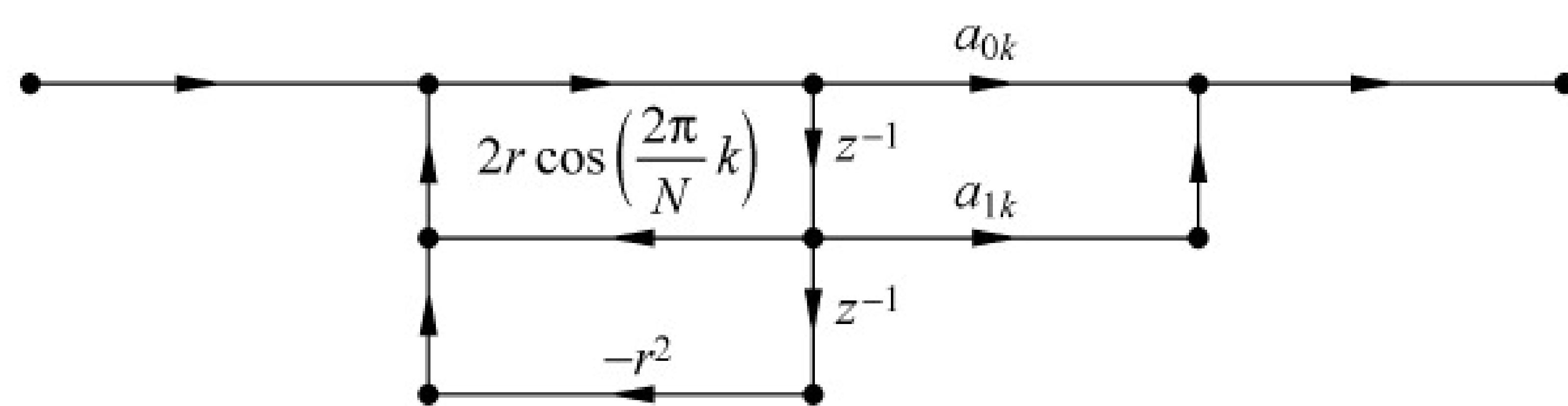


图 5-15　二阶 IIR 谐振器 $H_k(z)$

$$\begin{aligned}H_k(z)&=\frac{H(k)}{1-rW_N^{-k}z^{-1}}+\frac{H(N-k)}{1-rW_N^{-(N-k)}z^{-1}}\\&=\frac{a_{0k}+a_{1k}z^{-1}}{1-z^{-1}2r\cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)+r^2z^{-2}},\quad\begin{cases}k=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2},N\text{ 为奇数}\\k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1,N\text{ 为偶数}\end{cases}\end{aligned} \tag{5.1.28}$$

其中，

$$\begin{cases} a_{0k} = 2\mathrm{Re}[H(k)] \\ a_{1k} = -2r\mathrm{Re}[H(k)W_N^k] \end{cases} \tag{5.1.29}$$

实极点对应一阶 IIR 滤波器网络，其系统函数如式(5.1.30)和式(5.1.31)所示。

$$H_0(z) = \frac{H(0)}{1 - rz^{-1}} \tag{5.1.30}$$

$$H_{\frac{N}{2}}(z) = \frac{H\left(\frac{N}{2}\right)}{1 + rz^{-1}}, \quad N\text{ 为偶数} \tag{5.1.31}$$

综合起来，当 N 为偶数时，修正频率采样型 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$ 如式(5.1.32)所示，有一对实极点$\left(k=0\text{ 及 }k=\frac{N}{2}\text{点}\right)$；结构如图 5-16 所示，由一阶网络 $H_0(z)$、$H_{\frac{N}{2}}(z)$ 和各二阶网络 $H_k(z)$ 构成，$k=1,2,\cdots,\frac{N}{2}-1$。

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N})\frac{1}{N}\left[H_0(z) + H_{\frac{N}{2}}(z) + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}-1} H_k(z)\right] \tag{5.1.32}$$

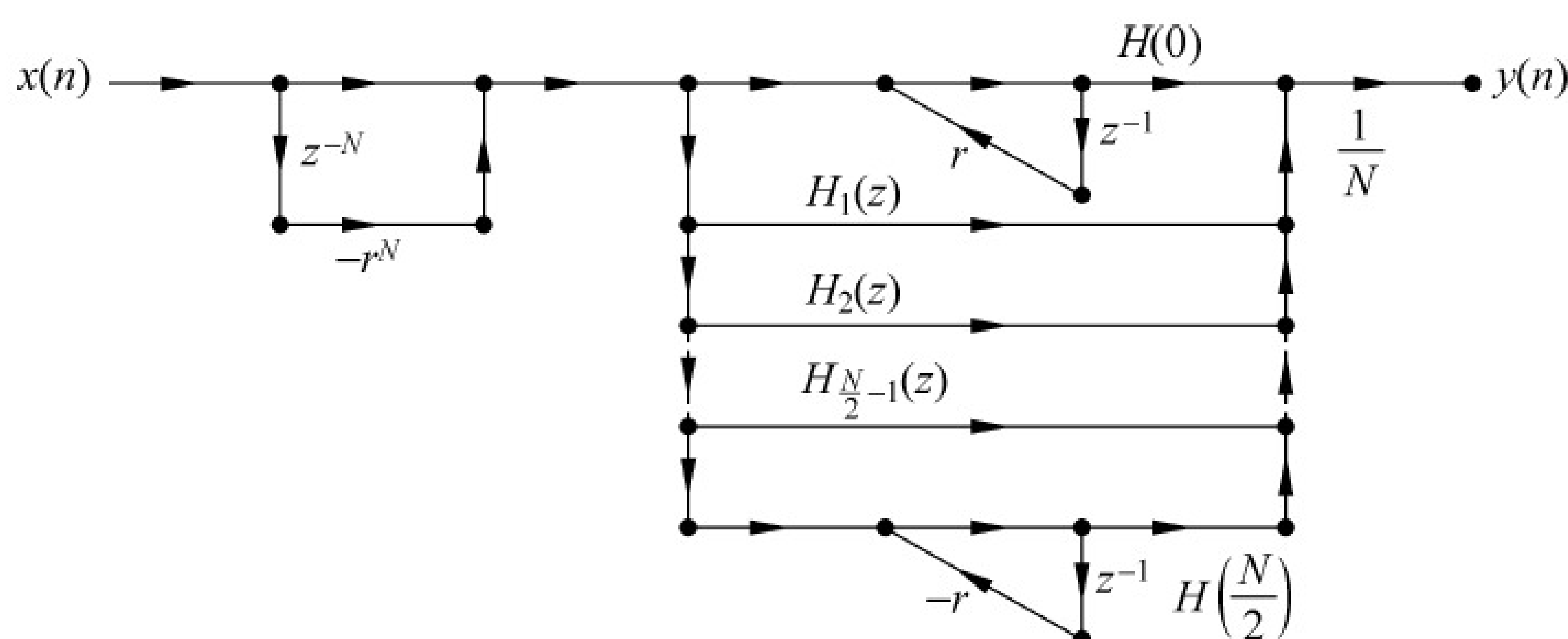


图 5-16 修正频率采样型 FIR 滤波器结构(N 为偶数)

当 N 为奇数时，修正频率采样型 FIR 滤波器的系统函数 $H(z)$，如式(5.1.33)所示，只有一个实极点($k=0$ 点)；结构如图 5-17 所示，由一阶网络 $H_0(z)$ 和各二阶网络 $H_k(z)$ 构成，$k=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$。

$$H(z) = (1 - r^N z^{-N})\frac{1}{N}\left[H_0(z) + \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} H_k(z)\right] \tag{5.1.33}$$

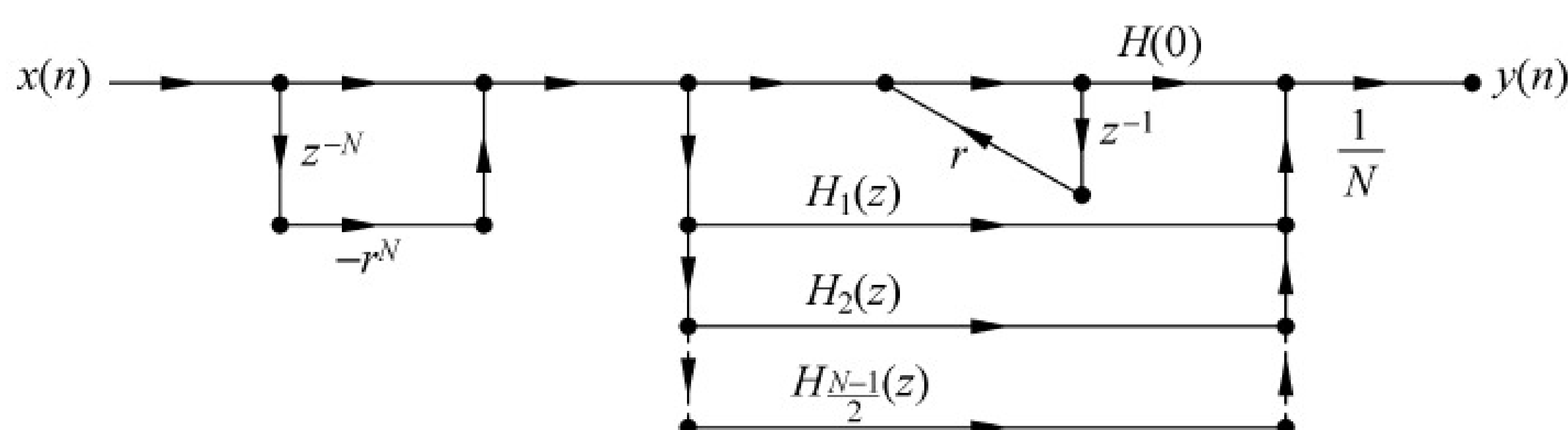


图 5-17 修正频率采样型 FIR 结构(N 为奇数)

5.1.5 格型结构

1. 全零点格型滤波器

一个 N 阶的 FIR 滤波器的系统函数如式(5.1.34)所示。

$$H(z)=B(z)=\sum_{i=0}^{N}b_i z^{-i}=1+\sum_{i=1}^{N}b_N^{(i)}z^{-i} \tag{5.1.34}$$

其中，$b_N^{(i)}$ 表示 FIR 滤波器的第 i 个系数，并假设首项(零次幂项)系数 $b_0=1$；$H(z)$对应的格型结构见图 5-18。

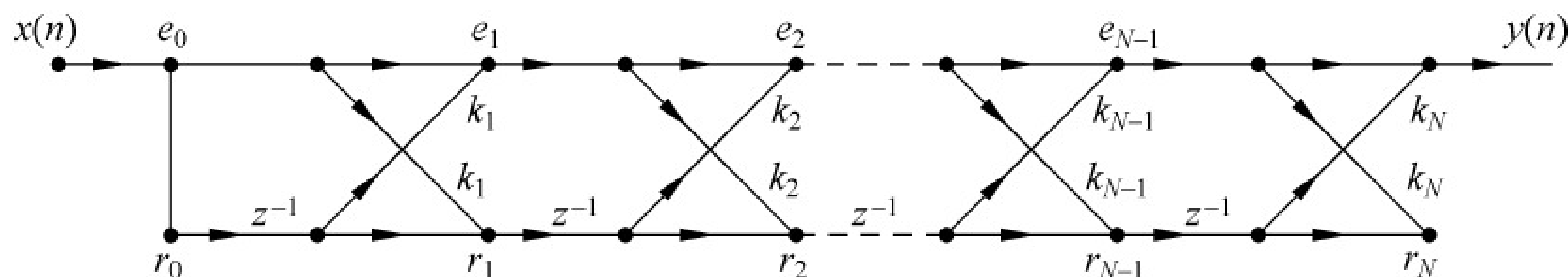


图 5-18 全零点格型滤波器网络结构

格型网络基本单元如图 5-19 所示，有两个输入端和两个输出端，输入信号 $x(n)$同时送到第一级格型网络单元的两个输入端，而在输出端仅取最后一级格型网络单元上面的一个输出端作为整个 FIR 格型滤波器的输出信号 $y(n)$。

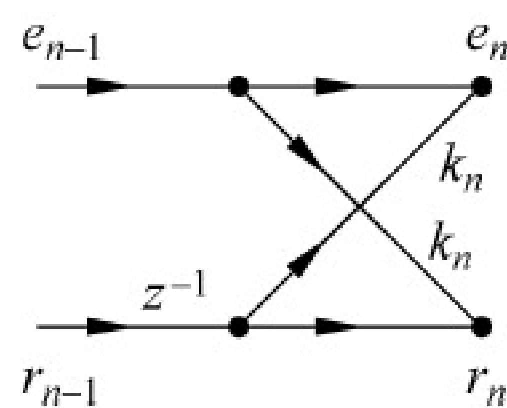


图 5-19 全零点格型结构基本单元

2. 全极点格型滤波器

一个 N 阶的 IIR 滤波器的系统函数如式(5.1.35)所示。

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{i=1}^{N}a_N^{(i)}z^{-i}}=\frac{1}{A(z)} \tag{5.1.35}$$

由式(5.1.35)可见，$H(z)=\dfrac{1}{A(z)}$可以看成是式(5.1.34)所示的 FIR 滤波器系统 $B(z)=A(z)$的逆系统。

所以将图 5-18 所示的 FIR 滤波器按求逆准则进行变换，即得到 IIR 滤波器 $H(z)=\dfrac{1}{A(z)}$的格型网络结构，如图 5-20 所示，具体步骤如下：

(1) 将输入至输出的无延迟通路全部反向，并把该通路的常数值支路增益改变为原来增益值的倒数(图 5-18 中上面 e_0—e_1—e_2—⋯—e_N 的支路，增益全为 1)。

(2) 再把指向上面这条新通路的各节点的其他支路的增益(指向上面节点的各支路增益反射系数)改变为原来增益值的负值。

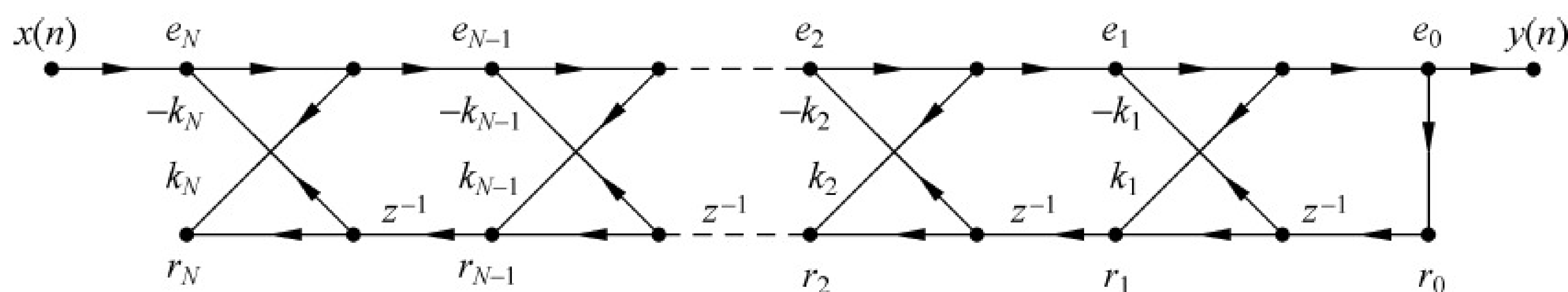


图 5-20 全极点格型滤波器网络结构

(3) 将输入、输出交换位置。

(4) 按照常规,将输入画在网络左端,输出画在网络右端,所得的格型网络如图 5-20 所示,系统函数正好就是原来 FIR 滤波器系统函数的倒数。

5.2　习题解答

5-1　设系统用下面时域 I/O 差分方程描述:

$$y(n)-\frac{3}{4}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=x(n)+\frac{1}{3}x(n-1)$$

试分别画出系统的直接型、级联型和并联型结构。差分方程中 $x(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示系统的输入和输出信号。

解:将时域 I/O 差分方程两边进行 z 变换得

$$Y(z)-\frac{3}{4}Y(z)z^{-1}+\frac{1}{8}Y(z)z^{-2}=X(z)+\frac{1}{3}X(z)z^{-1}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

(1) 直接型系统函数:

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

则直接型结构如图 5-21 所示。

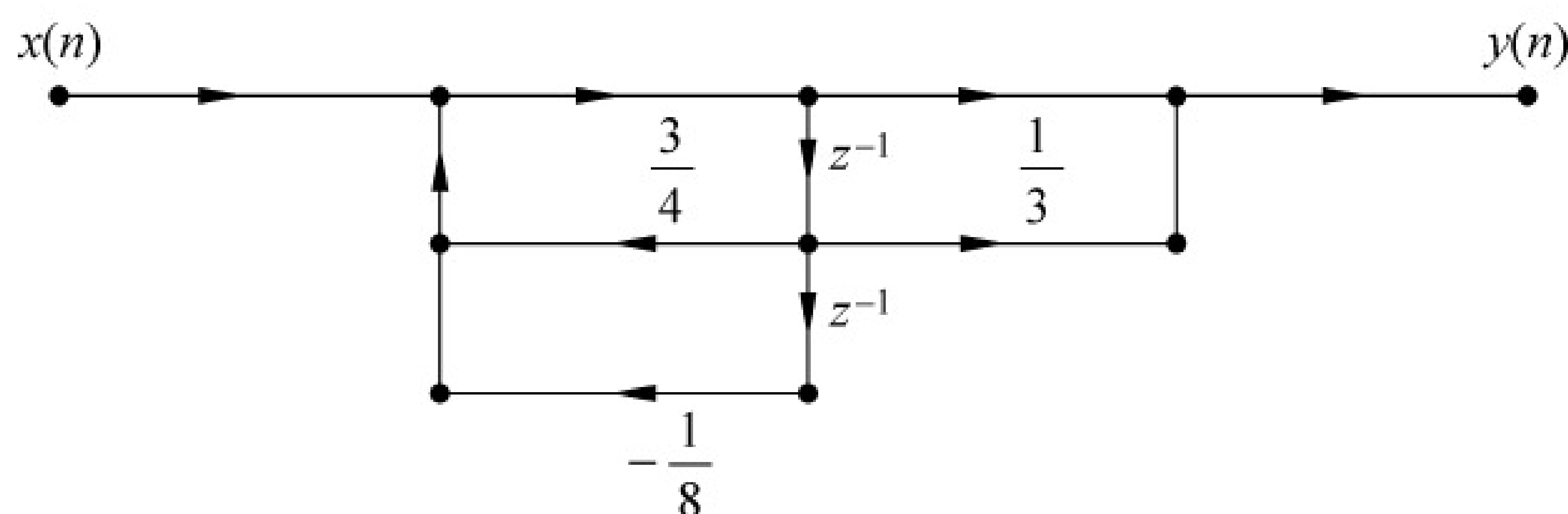


图 5-21　题 5-1 解图一

(2) 对 $H(z)$ 分母进行因式分解:

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

按照上式有两种级联形式:

①

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

②

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}\cdot\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

则级联型两种结构如图 5-22 和图 5-23 所示。

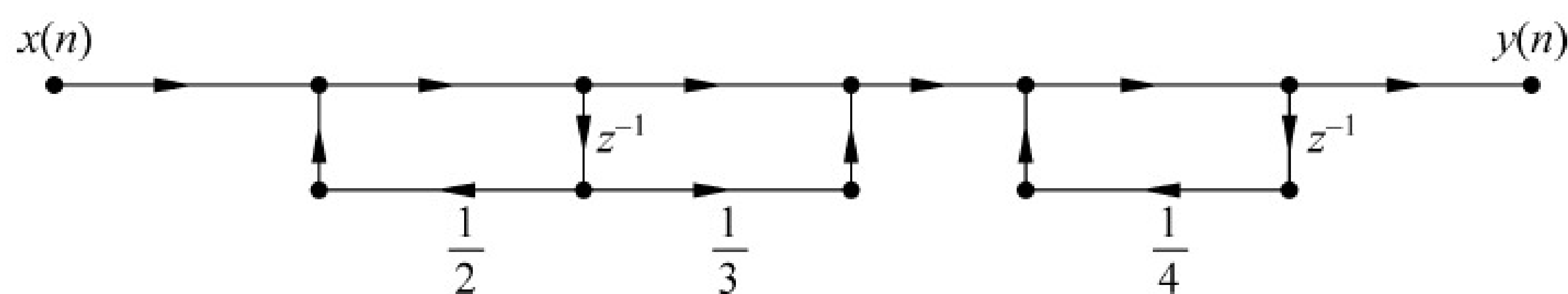


图 5-22 题 5-1 解图二

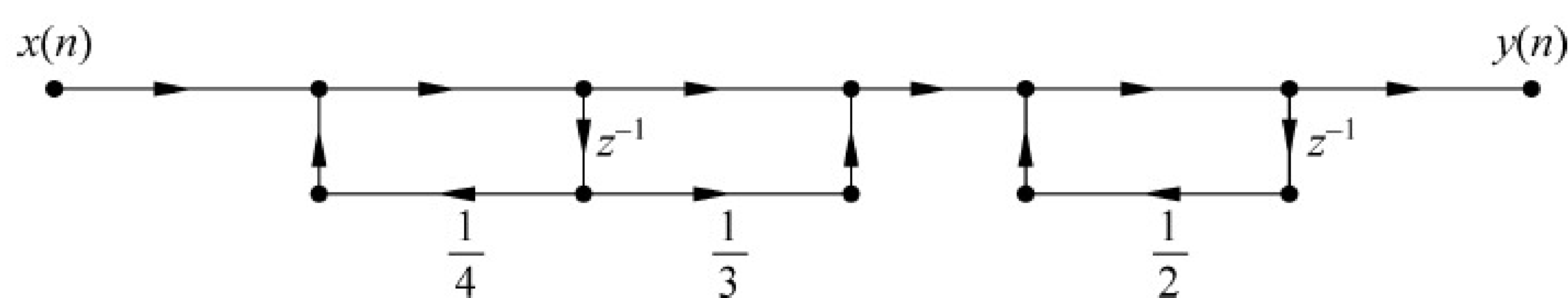


图 5-23 题 5-1 解图三

（3）对 $H(z)$进行部分分式展开：

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}=\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{z-\frac{1}{4}}$$

$$A=\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\left(z-\frac{1}{2}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{2}}=\frac{10}{3}$$

$$B=\frac{z+\frac{1}{3}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\left(z-\frac{1}{4}\right)\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}=-\frac{7}{3}$$

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{\frac{10}{3}}{z-\frac{1}{2}}+\frac{-\frac{7}{3}}{z-\frac{1}{4}}$$

$$H(z)=\frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

上式对应的并联型结构图如图 5-24 所示。

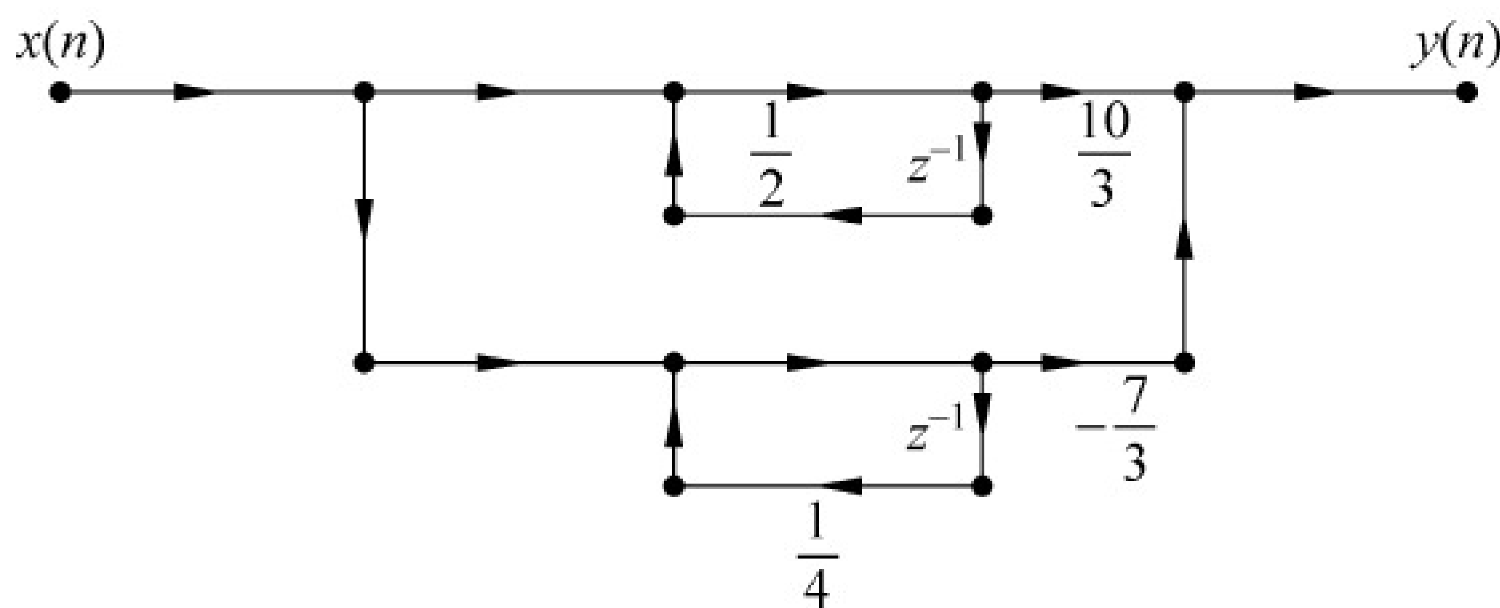


图 5-24　题 5-1 解图四

5-2　设数字滤波器的时域 I/O 差分方程为

$$y(n)=(a+b)y(n-1)-aby(n-2)+x(n-2)+(a+b)x(n-1)+abx(n)$$

式中，$|a|<1$，$|b|<1$。试画出系统的直接型、级联型结构，$x(n)$和 $y(n)$分别表示系统的输入和输出信号。

解：将时域 I/O 差分方程两边进行 z 变换，整理得

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{ab+(a+b)z^{-1}+z^{-2}}{1-(a+b)z^{-1}+abz^{-2}}$$

（1）系统函数直接型网络结构如图 5-25 所示。

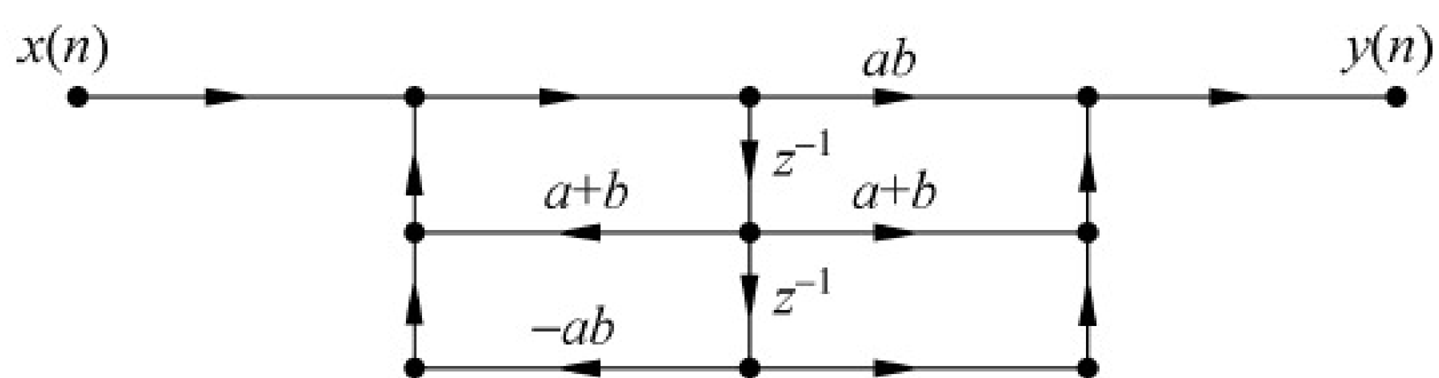


图 5-25　题 5-2 解图一

（2）对 $H(z)$的分子、分母多项式因式分解，可得级联型表达式，有两种形式：

① $H(z)=\dfrac{a+z^{-1}}{(1-az^{-1})}\cdot\dfrac{b+z^{-1}}{(1-bz^{-1})}$，其级联型结构如图 5-26 所示。

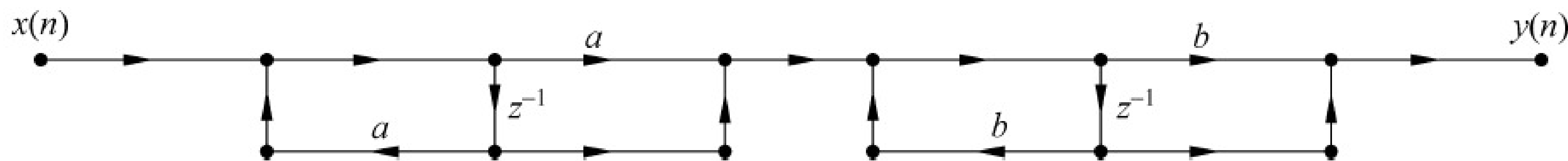


图 5-26　题 5-2 解图二

② $H(z)=\dfrac{b+z^{-1}}{(1-az^{-1})}\cdot\dfrac{a+z^{-1}}{(1-bz^{-1})}$，其级联型结构如图 5-27 所示。

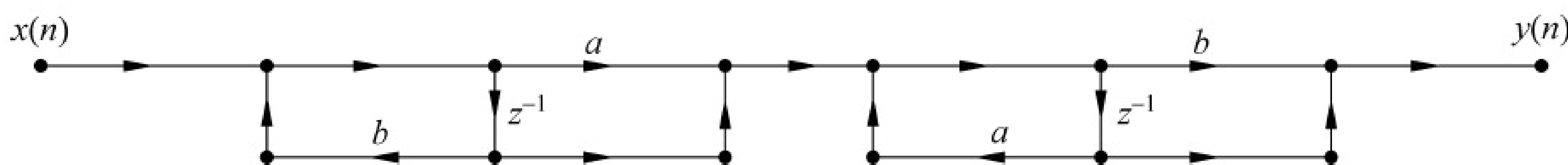


图 5-27　题 5-2 解图三

5-3　用直接型 Ⅰ 及典型型结构实现以下系统函数描述的数字系统：

$$H(z)=\frac{3+4.2z^{-1}+0.8z^{-2}}{2+0.6z^{-1}-0.4z^{-2}}$$

解：因为给定系统函数可整理为

$$H(z)=\frac{1.5+2.1z^{-1}+0.4z^{-2}}{1+0.3z^{-1}-0.2z^{-2}}=\frac{1.5+2.1z^{-1}+0.4z^{-2}}{1-(-0.3z^{-1}+0.2z^{-2})}$$

而系统函数一般形式为

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m z^{-m}}{1-\sum_{n=1}^{N}a_n z^{-n}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

两式相比，可得

$$a_1=-0.3,\quad a_2=0.2$$
$$b_0=1.5,\quad b_1=2.1,\quad b_2=0.4$$

直接型Ⅰ结构如图 5-28 所示。

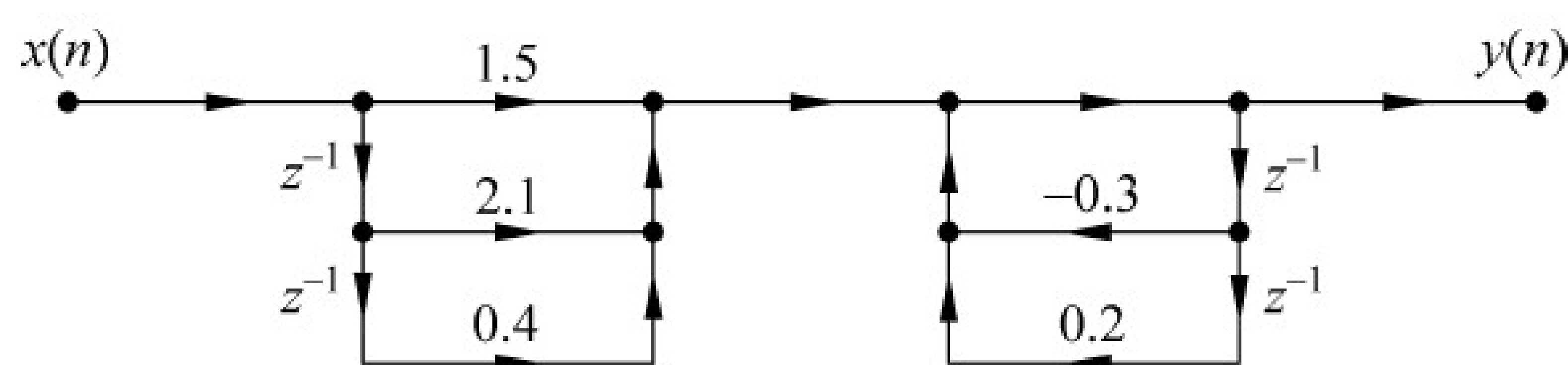


图 5-28　题 5-3 解图一

典型型结构如图 5-29 所示。

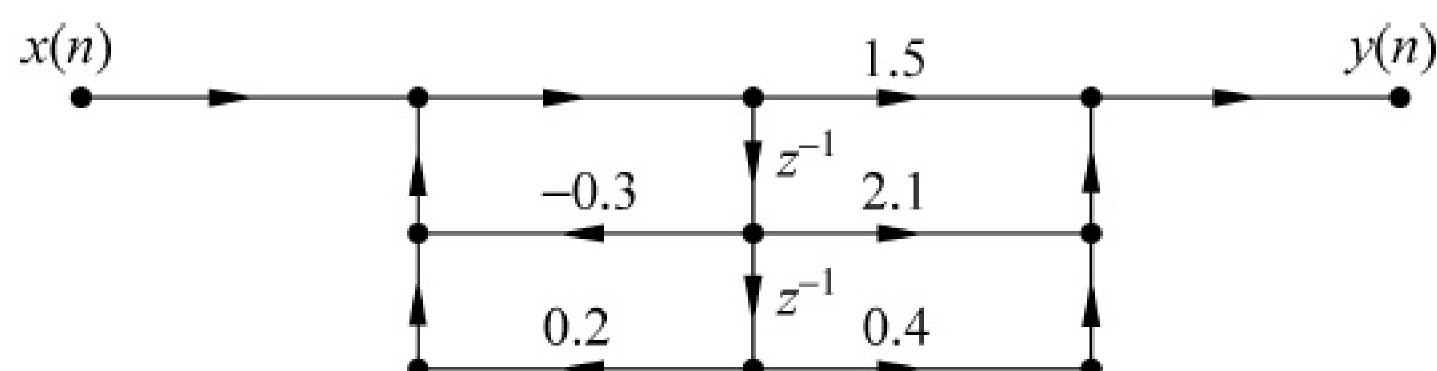


图 5-29　题 5-3 解图二

5-4　用级联型结构实现以下系统函数描述的数字系统，一共能构成几种级联型网络？

$$H(z)=\frac{4(z+1)(z^2-1.4z+1)}{(z-0.5)(z^2+0.9z+0.8)}$$

解：因为基于二阶节的级联型系统函数一般形式为

$$H(z)=A\prod_k\frac{1+\beta_{1k}z^{-1}+\beta_{2k}z^{-2}}{1-\alpha_{1k}z^{-1}-\alpha_{2k}z^{-2}}=\frac{4(1+z^{-1})(1-1.4z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

则

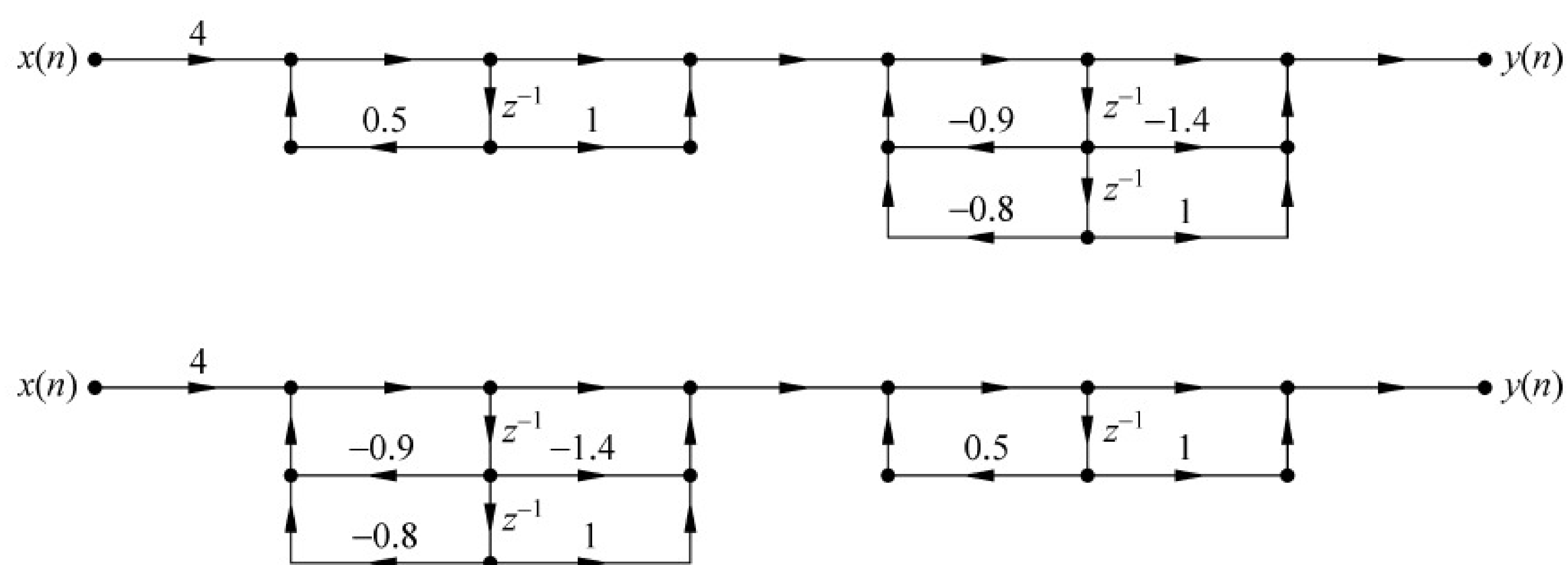
$$A=4$$
$$\beta_{11}=1,\quad \beta_{21}=0,\quad \beta_{12}=-1.4,\quad \beta_{22}=1$$
$$\alpha_{11}=0.5,\quad \alpha_{21}=0,\quad \alpha_{12}=-0.9,\quad \alpha_{22}=-0.8$$

由此可得，若采用二阶节实现，还考虑分子分母组合成二阶（一阶）基本节的方式和级联次序，则有四种实现形式。结构一和结构二示意图分别如图 5-30 和图 5-31 所示。

5-5　图 5-32 中画出了 4 个系统，试用各子系统的单位采样脉冲响应分别表示各总系统的单位采样脉冲响应 $h(n)$。并求其总系统函数 $H(z)$。

解：

(a) $h(n)=h_1(n)*h_2(n)*h_3(n)$，　$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)\cdot H_3(z)$



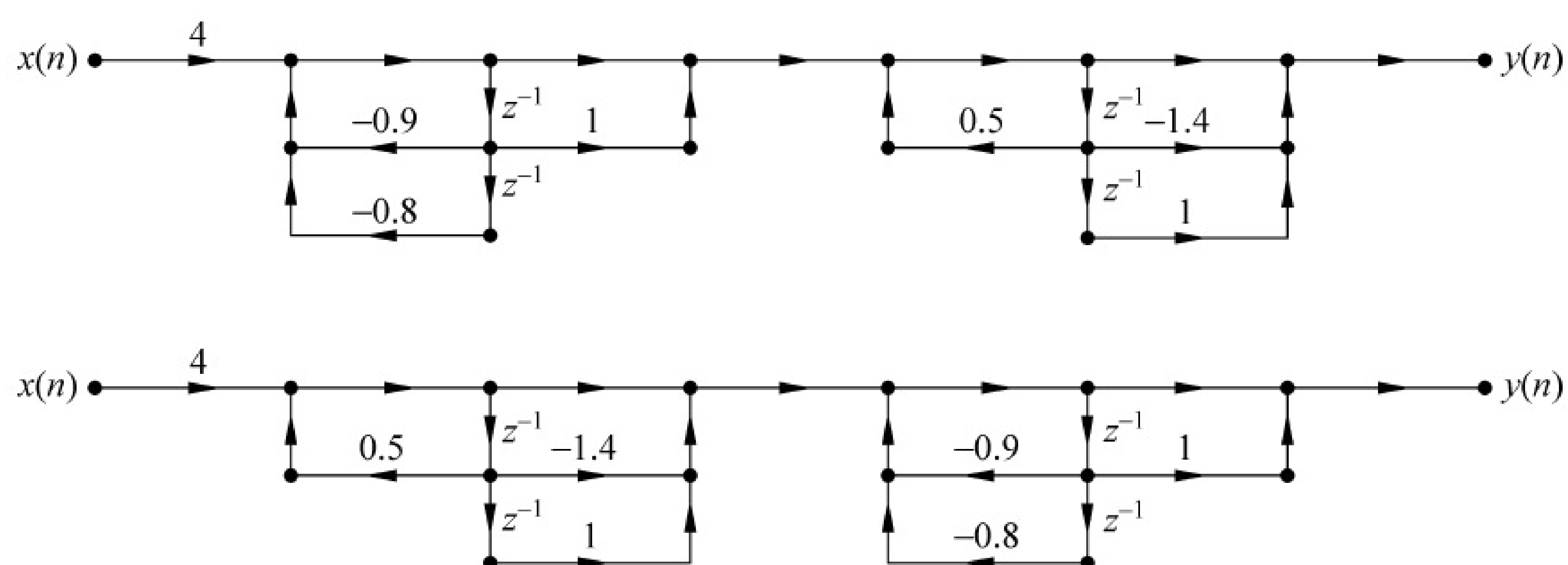


图 5-30　题 5-4 解图一

图 5-31　题 5-4 解图二

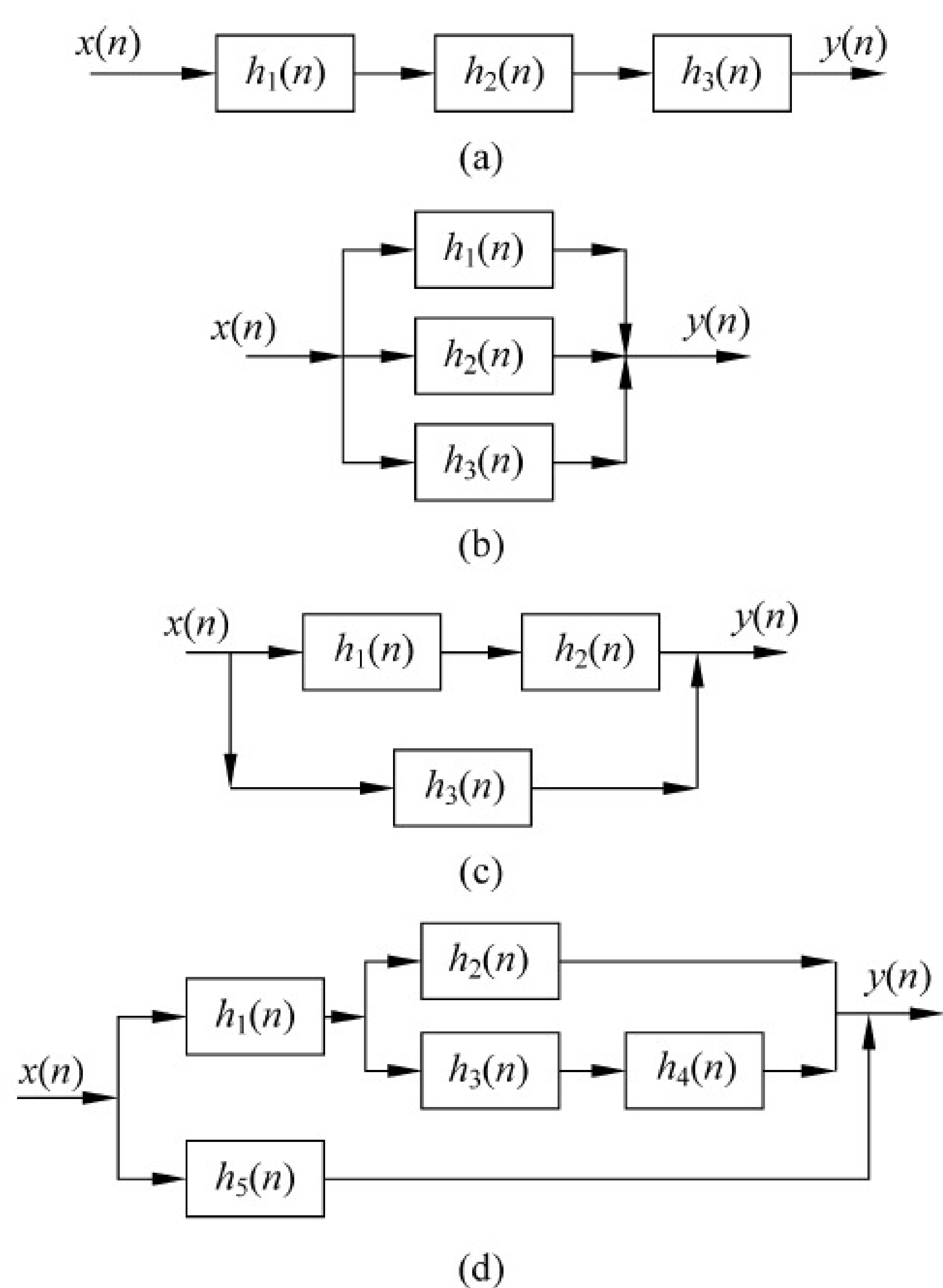


图 5-32　题 5-5 图

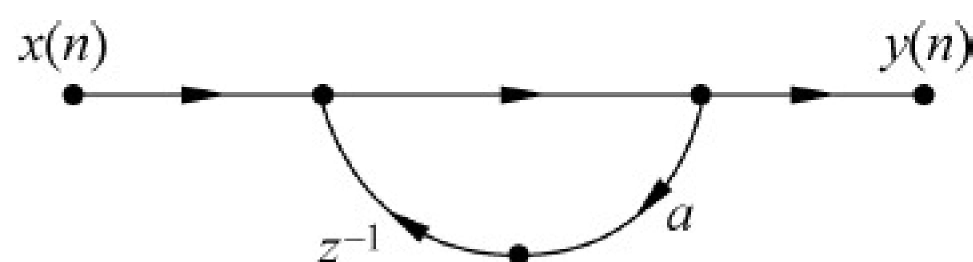
(b) $h(n)=h_1(n)+h_2(n)+h_3(n)$，　$H(z)=H_1(z)+H_2(z)+H_3(z)$

(c) $h(n)=h_1(n)*h_2(n)+h_3(n)$，　$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)+H_3(z)$

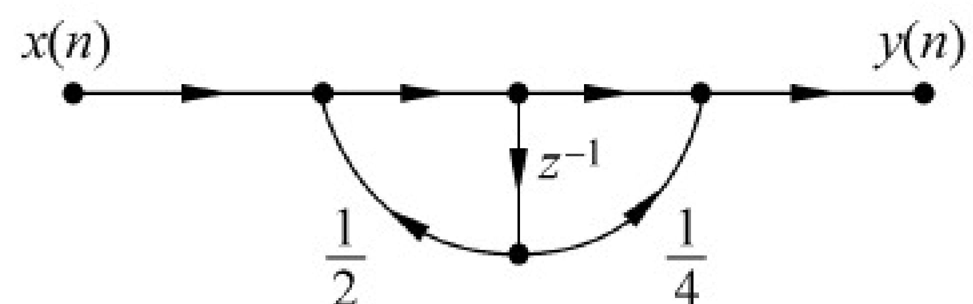
(d) $h(n)=h_1(n)*h_2(n)+h_1(n)*h_3(n)*h_4(n)+h_5(n)$

$H(z)=H_1(z)H_2(z)+H_1(z)H_3(z)H_4(z)+H_5(z)$

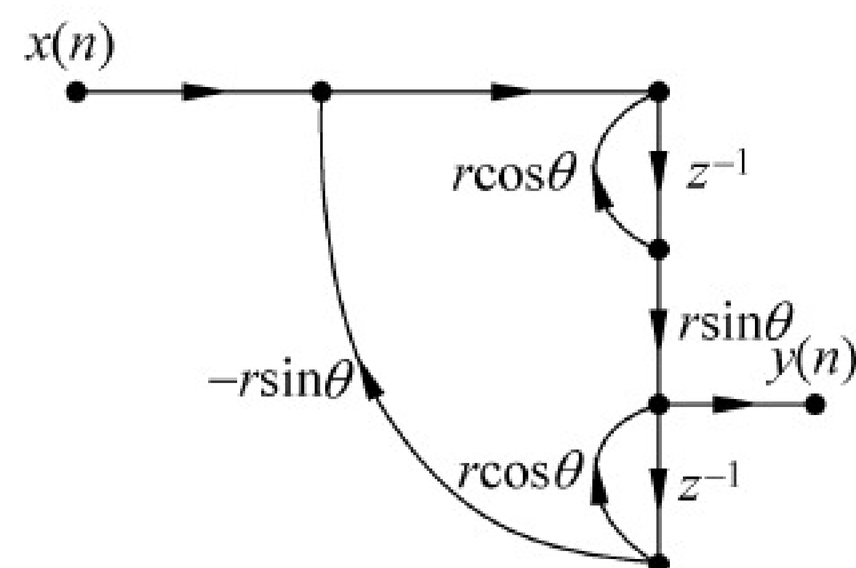
5-6　写出图 5-33 中各信号流图表示的数字系统的系统函数及时域 I/O 差分方程。



(a) 流图一



(b) 流图二



(c) 流图三

图 5-33　题 5-6 图

解：

(a) 根据给定信号流图，系统时域 I/O 差分方程为

$$y(n)=ay(n-1)+x(n)$$

上式两边 z 变换，整理得系统函数

$$H(z)=\frac{1}{(1-az^{-1})}$$

(b) 根据系统函数和典型型网络结构的关系，可直接写出

$$H(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

系统函数对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)$$

(c) 令流程图右上的节点为 $w(n)$，根据流程图列出节点时域 I/O 差分方程：

$$w(n)=x(n)+(-r\sin\theta)y(n-1)+(r\cos\theta)w(n-1) \quad ①$$

$$y(n)=(r\cos\theta)y(n-1)+(r\sin\theta)w(n-1) \quad ②$$

式①、式②两边取 z 变换：

$$W(z)=X(z)-r\sin\theta\cdot z^{-1}Y(z)+r\cos\theta\cdot z^{-1}W(z) \quad ③$$

$$Y(z)=r\cos\theta\cdot z^{-1}Y(z)+r\sin\theta\cdot z^{-1}W(z) \quad ④$$

联立式③、式④，消去 $W(z)$，整理得系统函数

$$H(z)=\frac{r\sin\theta\cdot z^{-1}}{1-2r\cos\theta\cdot z^{-1}+r^2\cdot z^{-2}}$$

对应的时域 I/O 差分方程为

$$y(n)=2r\cos\theta\cdot y(n-1)-r^2y(n-2)+r\sin\theta\cdot x(n-1)$$

5-7　试给出以下系统函数所描述数字系统的并联型实现：

$$H(z)=\frac{5.2+1.58z^{-1}+1.41z^{-2}-1.6z^{-3}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}$$

解：对此系统函数进行因式分解并展成部分分式，得

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{5.2+1.58z^{-1}+1.41z^{-2}-1.6z^{-3}}{(1-0.5z^{-1})(1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2})}\\&=4+\frac{0.2}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1+0.3z^{-1}}{1+0.9z^{-1}+0.8z^{-2}}\end{aligned}$$

则

$$G_0 = 4$$
$$\alpha_{11} = 0.5,\quad \alpha_{21} = 0,\quad \alpha_{12} = -0.9,\quad \alpha_{22} = -0.8$$
$$\gamma_{01} = 0.2,\quad \gamma_{11} = 0,\quad \gamma_{02} = 1,\quad \gamma_{12} = 0.3$$

并联结构如图 5-34 所示。

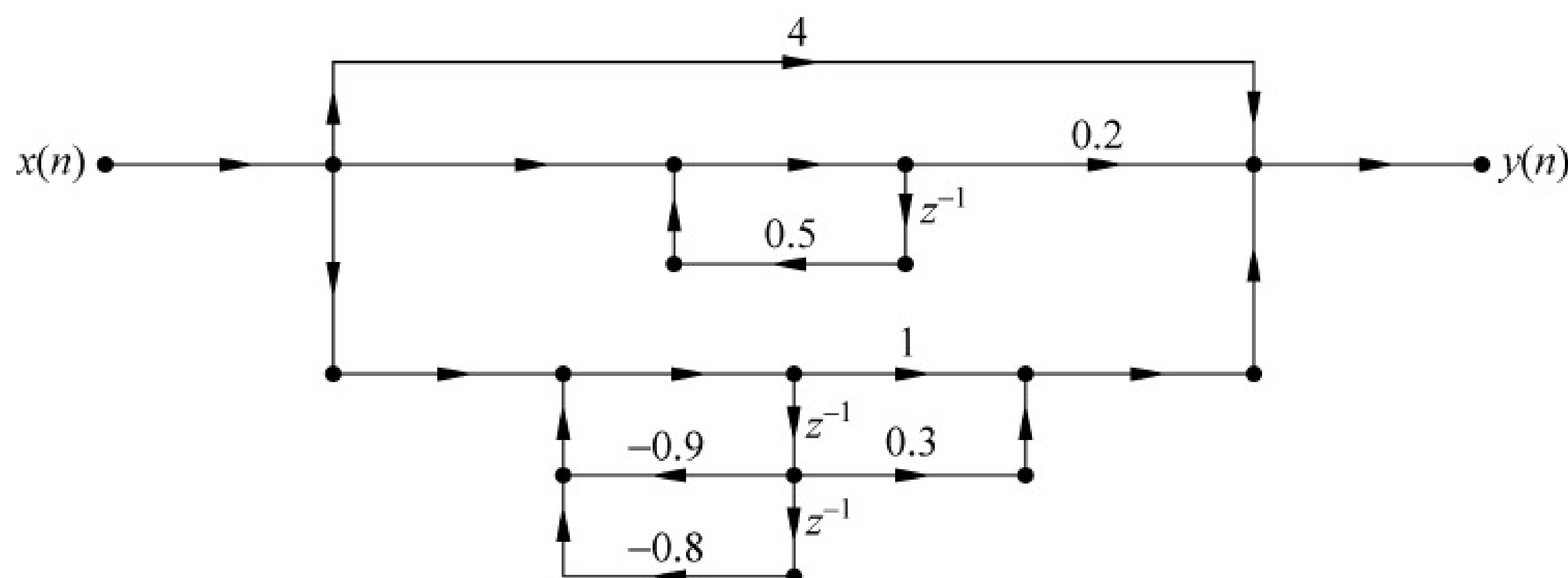


图 5-34　题 5-7 解图

5-8　已知 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应为

$$h(n) = \delta(n) + 0.3\delta(n-1) + 0.72\delta(n-2) + 0.11\delta(n-3) + 0.12\delta(n-4)$$

试画出其级联型结构实现。

解：根据 $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n}$，依给定的 $h(n)$ 得

$$H(z) = 1 + 0.3z^{-1} + 0.72z^{-2} + 0.11z^{-3} + 0.12z^{-4}$$
$$= (1 + 0.2z^{-1} + 0.3z^{-2})(1 + 0.1z^{-1} + 0.4z^{-2})$$

而 FIR 滤波器级联型结构的模型公式为

$$H(z) = \prod_{k=1}^{\left[\frac{N}{2}\right]} (\beta_{0k} + \beta_{1k}z^{-1} + \beta_{2k}z^{-2})$$

对照上式可得

$$\beta_{01} = 1,\quad \beta_{11} = 0.2,\quad \beta_{21} = 0.3$$
$$\beta_{02} = 1,\quad \beta_{12} = 0.1,\quad \beta_{22} = 0.4$$

级联结构如图 5-35 所示。

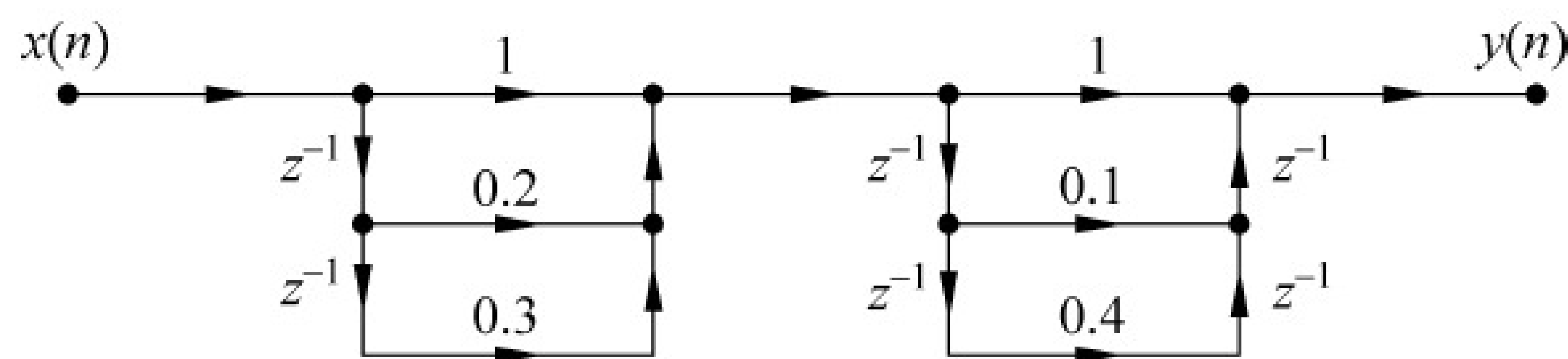


图 5-35　题 5-8 解图

5-9　写出图 5-36 中各信号流图描述的数字系统的系统函数

解：

(a) $H(z) = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}z^{-1}} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{3}{4}z^{-1}}$

(b) 流程图的中间两个单位延迟器从下向上节点设为 $u(n)$、$v(n)$、$w(n)$，则根据流程

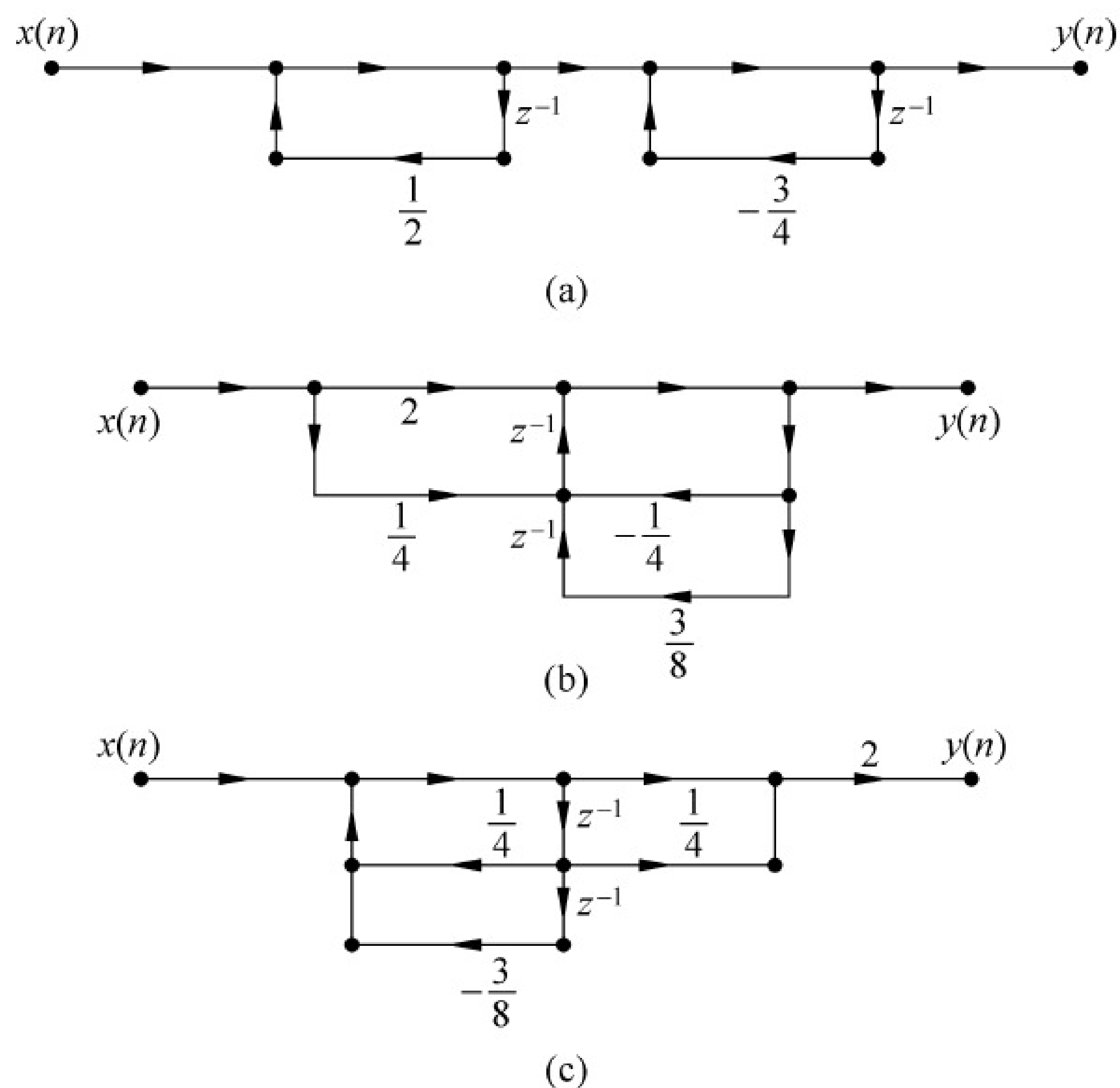


图 5-36 题 5-9 图

图，可列出节点的时域差分方程：

$$u(n)=\frac{3}{8}y(n) \quad ①$$

$$v(n)=u(n-1)+\frac{1}{4}x(n)-\frac{1}{4}y(n) \quad ②$$

$$w(n)=2x(n)+v(n-1)$$

$$y(n)=w(n)=2x(n)+v(n-1) \quad ③$$

式①～式③两边 z 变换，消去 $U(z)$、$V(z)$，整理得系统函数

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z)=\frac{2+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}}$$

讨论：

① 题 5-9 的图 5-36(b)正是上述系统函数描述的常规典型型网络结构的转置型网络结构；

② 转置型网络结构也很常用。读者可以自己总结转置型网络结构和系统函数 $H(z)$的关系特征。

(c) 根据典型型网络结构图和系统函数的关系，可以写出：

$$H(z)=\frac{2+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{3}{8}z^{-2}}$$

5-10　已知滤波器的单位采样脉冲响应为 $h(n)=0.9^n R_5(n)$，求出该滤波器的系统函数，并画出其直接型结构。

解：

$$h(n)=0.9^n R_5(n)$$

$$H(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 0.9^n R_5(n) z^{-n}=\sum_{n=0}^{4} 0.9^n z^{-n}$$

$$=\frac{1-0.9^5 z^{-5}}{1-0.9z^{-1}}=\frac{1-0.59049z^{-5}}{1-0.9z^{-1}}$$

由上式得到系统函数直接型结构如图 5-37 所示。

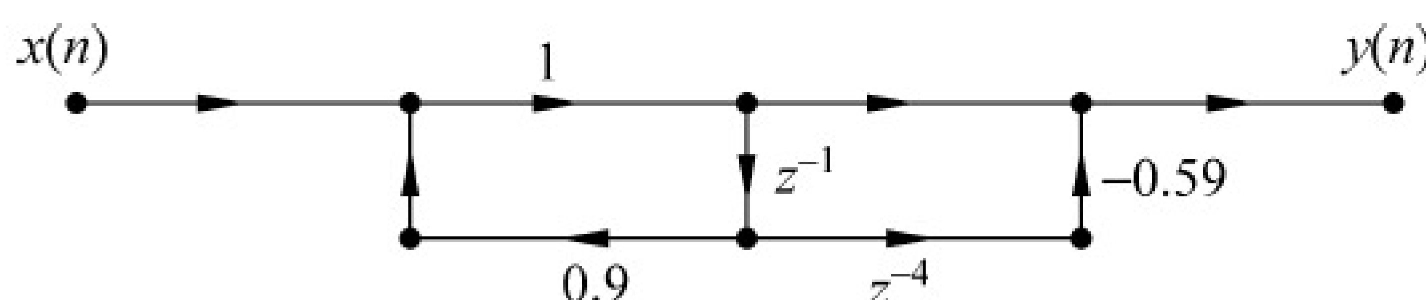


图 5-37　题 5-10 解图

5-11　已知滤波器的单位采样脉冲响应为 $h(n)=\delta(n)-\delta(n-1)+\delta(n-4)$，试用频率采样结构来实现该滤波器。设采样点数 $N=5$，要求画出频率采样网络结构图，写出滤波器的参数计算公式。

解：已知频率采样结构的公式为

$$H(z)=(1-z^{-N})\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$N=5$ 时，

$$H(k)=\mathrm{DFT}[h(n)]=\sum_{n=0}^{4}[\delta(n)-\delta(n-1)+\delta(n-4)]W_N^{kn}$$

$$=1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2}{5}\pi k}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{8}{5}\pi k},\quad k=0,1,2,3,4$$

其采样频率结构如图 5-38 所示。

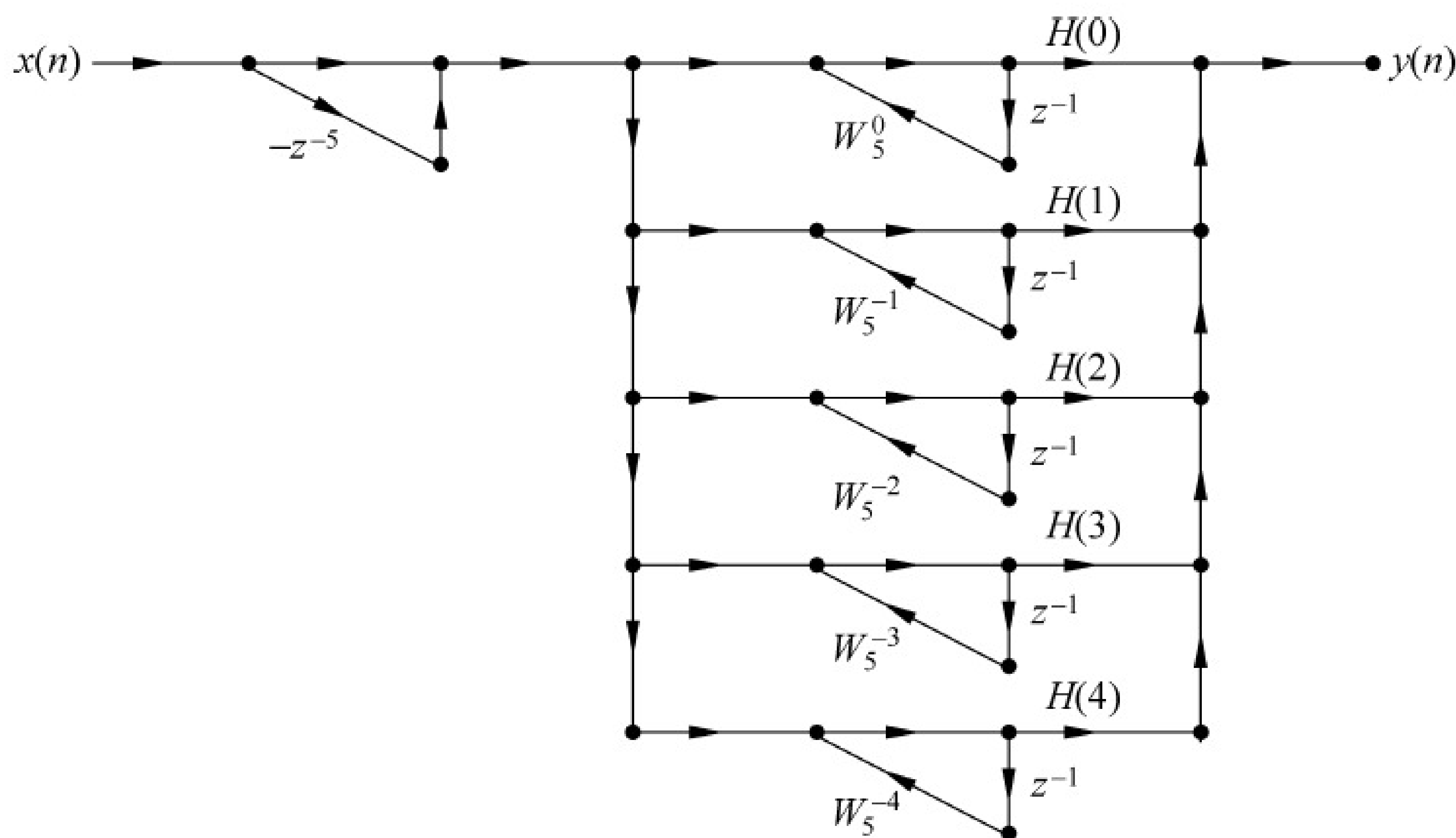


图 5-38　题 5-11 解图

5-12 设某 FIR 数字滤波器的系统函数为

$$H(z)=\frac{1}{5}\times(1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}+z^{-4})$$

试画出此滤波器的线性相位网络结构。

解：由题中所给条件可知

$$h(n)=\frac{1}{5}\delta(n)+\frac{3}{5}\delta(n-1)+\delta(n-2)+\frac{3}{5}\delta(n-3)+\frac{1}{5}\delta(n-4)$$

则

$$h(0)=h(4)=\frac{1}{5}=0.2$$

$$h(1)=h(3)=\frac{3}{5}=0.6$$

$$h(2)=1$$

即 $h(n)$是偶对称，对称中心在 $n=\frac{N-1}{2}=2$ 处，N 为奇数($N=5$)。

线性相位网络结构如图 5-39 所示。

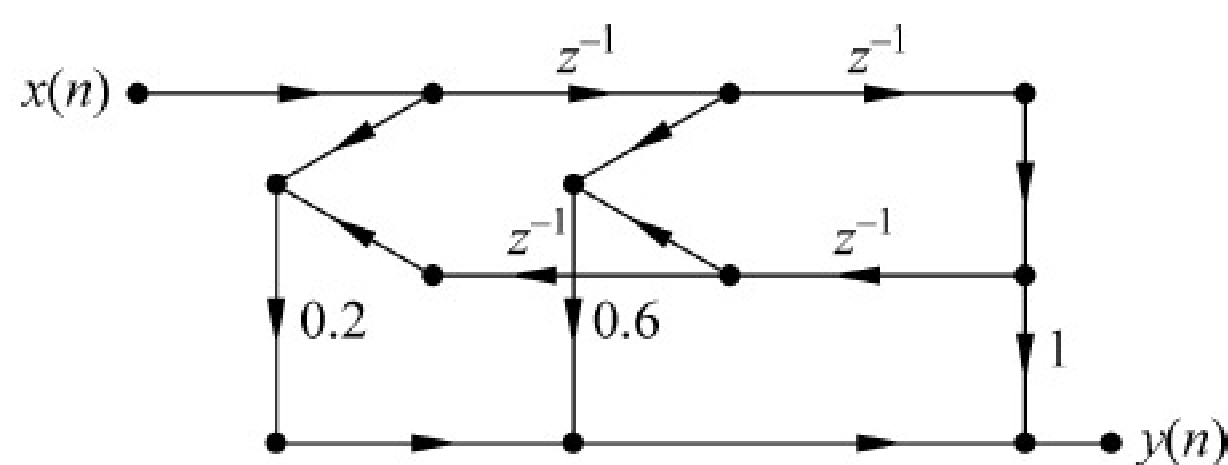


图 5-39 题 5-12 解图

5-13 设滤波器的时域 I/O 差分方程为：

$$y(n)=x(n)+x(n-1)+\frac{1}{3}y(n-1)+\frac{1}{4}y(n-2)$$

(1) 试用直接型Ⅰ、典型型及一阶节的级联型、一阶节的并联型网络结构实现此差分方程。

(2) 求系统的频率响应(幅度响应及相位响应)。

(3) 设采样频率为 10kHz，输入正弦波幅度为 5，频率为 1kHz，试求该滤波器的稳态输出。

解：

(1) 根据

$$y(n)=\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)+\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

可得

$$a_1=\frac{1}{3},\quad a_2=\frac{1}{4},\quad b_0=1,\quad b_1=1$$

直接型Ⅰ结构及典型型结构见图 5-40 和图 5-41。

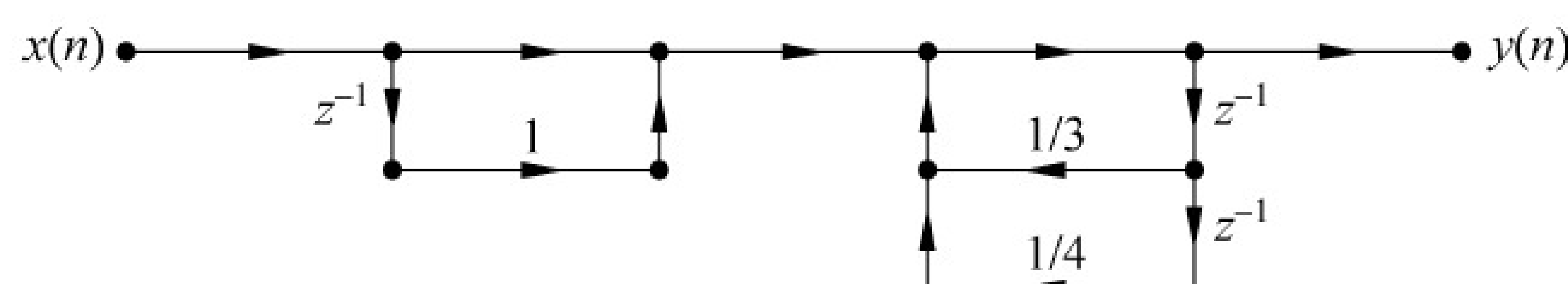


图 5-40　题 5-13 解图一

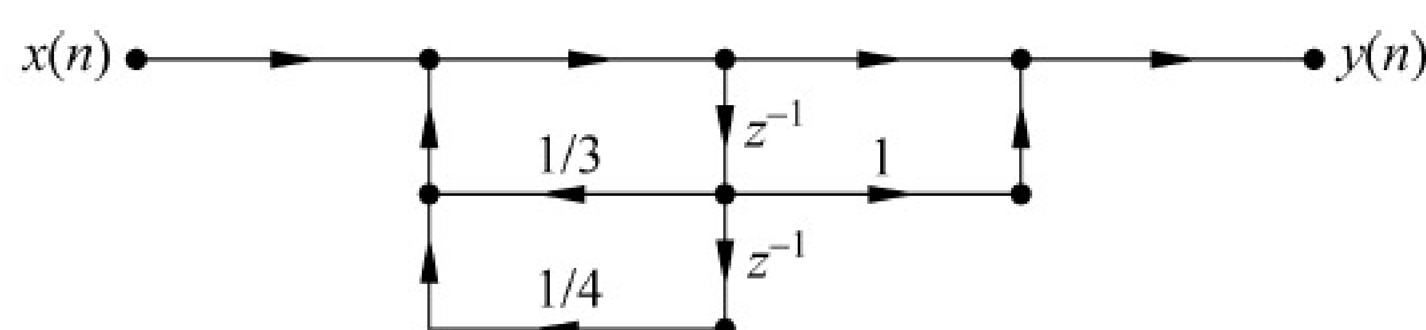


图 5-41　题 5-13 解图二

一阶节级联型的 $H(z)$ 如下：

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{(1-0.69z^{-1})(1+0.36z^{-1})}$$

一阶节级联型结构示意图见图 5-42。

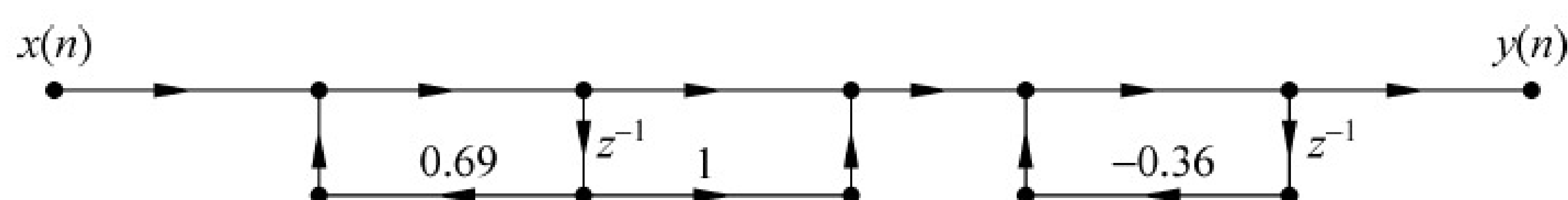


图 5-42　题 5-13 解图三

一阶节并联型的 $H(z)$ 求得如下：

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1+\sqrt{10}}{6}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}-\frac{7}{20}\sqrt{10}}{1-\frac{1-\sqrt{10}}{6}z^{-1}}$$

$$=\frac{1.61}{1-0.69z^{-1}}-\frac{0.61}{1+0.36z^{-1}}$$

一阶节并联结构见图 5-43。

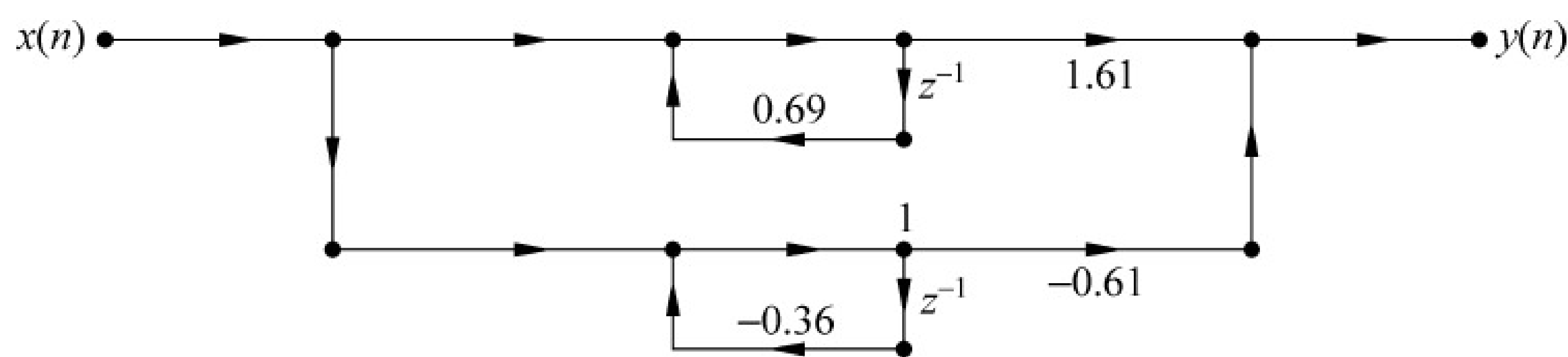


图 5-43　题 5-13 解图四

（2）由题意可知

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}-\frac{1}{4}z^{-2}}$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，代入系统函数可推出系统频率响应：

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}{1-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}\omega}}=\frac{(1+\cos\omega)-\mathrm{j}\sin\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega+\mathrm{j}\left(\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin2\omega\right)}$$

系统幅频特性为

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\frac{\sqrt{(1+\cos\omega)^2+\sin^2\omega}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega\right)^2+\left(\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin2\omega\right)^2}}$$

利用三角恒等式 $\cos2\omega=2(\cos\omega)^2-1=1-2(\sin\omega)^2=(\cos\omega)^2-(\sin\omega)^2$、$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$，化简上式可得：

$$|H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|=\frac{2\cos\frac{\omega}{2}}{\sqrt{\frac{169}{144}+\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^2-(\cos\omega)^2}}$$

相频特性为

$$\begin{aligned}\arg[H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]&=-\arctan\left(\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega}\right)-\arctan\left(\frac{\frac{1}{3}\sin\omega+\frac{1}{4}\sin2\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega}\right)\\&=-\arctan\left(\tan\frac{\omega}{2}\right)-\arctan\left(\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cos\omega\right)\sin\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos(2\omega)}\right)\\&=-\frac{\omega}{2}-\arctan\left(\frac{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cos\omega\right)\sin\omega}{1-\frac{1}{3}\cos\omega-\frac{1}{4}\cos2\omega}\right)\end{aligned}$$

（3）已知输入正弦波幅度为5，频率为1kHz，可得 $x(t)$ 的周期 T_1 为

$$T_1=\frac{1}{1000\mathrm{Hz}}=10^{-3}\mathrm{s}=1\mathrm{ms}$$

又因采样频率为10kHz，即采样周期为

$$T=\frac{1}{10\times10^3\,\mathrm{Hz}}=0.1\times10^{-3}\mathrm{s}=0.1\mathrm{ms}$$

即对正弦信号 $x(t)=5\sin(2\pi t\times10^3)$ 采样，在 $x(t)$ 的一个周期内，采样点数为10个，且在下一周期内的采样值与 $(0,T_1)$ 间的采样值完全一样。所以可以将输入看作

$$\begin{aligned}x(n)&=5\sin(2\pi\times10^3\times nT)\\&=5\sin(10^3\times2\pi\times10^{-4}n)=5\sin\left(\frac{1}{5}n\pi\right),\quad n=0,1,2,\cdots,9\end{aligned}$$

系统输入序列的周期为10，数字频率为：

$$\omega_0 = 0.2\pi \text{ rad}$$

可得此系统稳态输出为

$$y(n) = 5\left|H(e^{j\omega_0})\right|\sin[\omega_0 n + \arg(H(e^{j\omega_0}))]$$

$$\left|H(e^{j\omega_0})\right| = \left.\frac{2\cos\dfrac{\omega_0}{2}}{\sqrt{\dfrac{169}{144} + \left(\sin\dfrac{\omega_0}{2}\right)^2 - (\cos\omega_0)^2}}\right|_{\omega_0=0.2\pi}$$

$$= 2.4263$$

$$\arg[H(e^{j\omega_0})] = \left.\left\{-\frac{\omega}{2} - \arctan\left(\frac{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}\cos\omega\right)\sin\omega}{1-\dfrac{1}{3}\cos\omega-\dfrac{1}{4}\cos(2\omega)}\right)\right\}\right|_{\omega=0.2\pi}$$

$$= -0.1\pi - 0.1866\pi$$

$$= -0.2866\pi = -0.9$$

故输出为

$$y(n) = 12.13\sin(0.2\pi n - 0.9)$$

5-14 分别给定三个数字滤波器的系统函数为：

$$H_1(z) = 1 - 0.6z^{-1} - 1.4145z^{-2} + 0.864z^{-3}$$

$$H_2(z) = 1 - 0.98z^{-1} + 0.9z^{-2} - 0.898z^{-3}$$

$$H_3(z) = H_1(z)/H_2(z)$$

分别画出它们的直接型网络结构。

解：$H_1(z)$，$H_2(z)$和 $H_3(z)$直接型结构如图 5-44～图 5-46 所示。

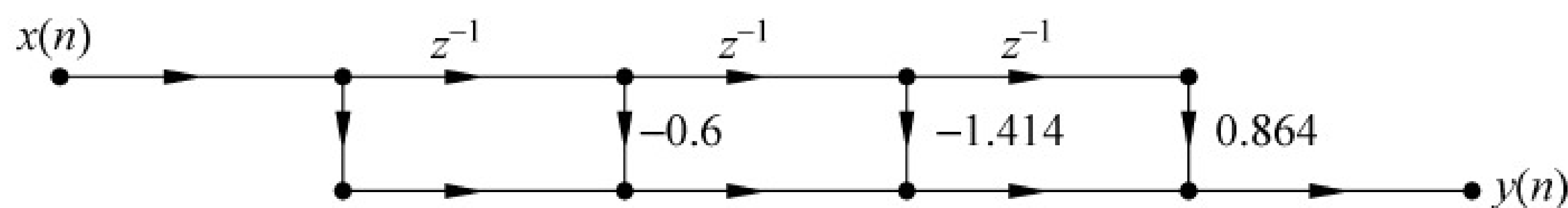


图 5-44 题 5-14 解图一

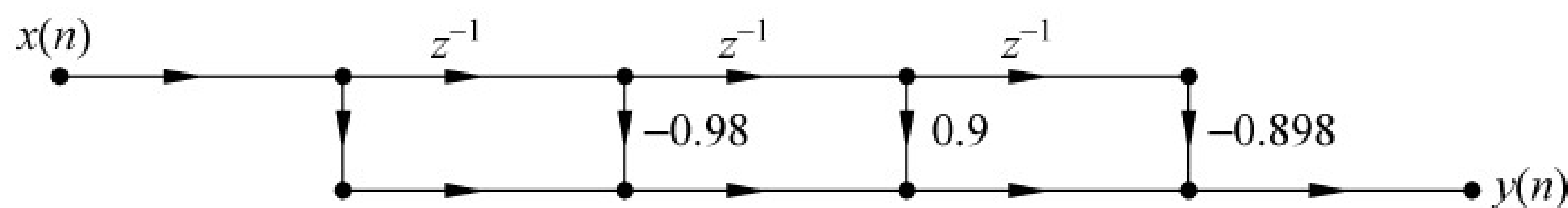


图 5-45 题 5-14 解图二

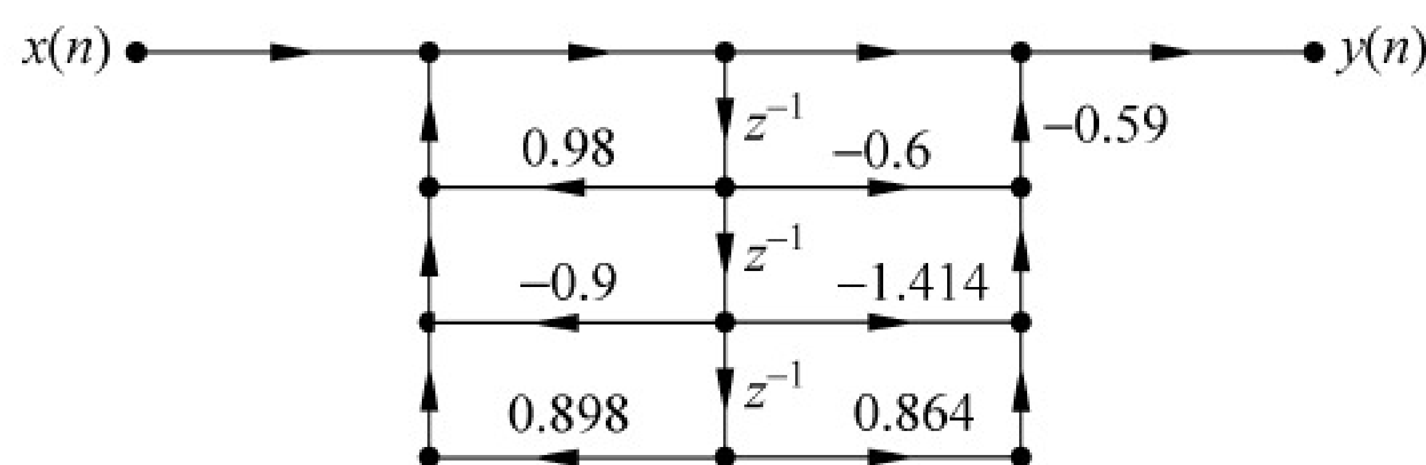


图 5-46 题 5-14 解图三

第 6 章 IIR 数字滤波器设计

CHAPTER 6

6.1 重点内容

6.1.1 基本概念

1. 数字滤波器和模拟滤波器

模拟滤波器是选频网络，对通过该滤波器的信号在要求的频带内进行幅度的衰减。理想模拟滤波器幅频特性 $|H_a(j\Omega)|$ 是模拟频率 Ω（单位为 rad/s）的连续函数，且通频带具有分段线性性。其理想幅频特性如图 6-1(a)所示。实际幅频特性如图 6-1(b)所示，通带和阻带之间有过渡带。

数字滤波器的频谱特性 $H(e^{j\omega})$ 是数字频率 ω（单位为 rad）的连续、周期函数，周期为 2π。低频段在 2π 的整数倍处，高频段在 π 的奇数倍处。理想幅频特性如图 6-2 所示。

> **特别提示：** 从幅频特性上进行分类，模拟、数字滤波器均可分为低通(LP)、带通(BP)、高通(HP)和带阻(BS)滤波器等。

2. 滤波器的指标

数字滤波器的传输函数 $H(e^{j\omega})$ 表示如下：

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \tag{6.1.1}$$

其中，$|H(e^{j\omega})|$ 为幅频特性，表示滤波器的输入信号中各 ω 频率分量经滤波器后的振幅衰减情况。$\theta(\omega)=\arg[H(e^{j\omega})]$ 为相频特性，反映滤波器的输入信号中各 ω 频率成分经滤波器后的延时情况。

IIR 滤波器重点探讨幅频特性，因其相位特性线性差，常用作选频滤波器。FIR 滤波器，除要求幅频特性外，还可以具有线性相位，适合对滤波器的时域输出波形有严格要求的使用情况，如语音合成、数字图像处理等应用场合。

以数字 LPF 为例，如图 6-3 所示，滤波器的性能指标如下。

ω_p：通带边缘频率。

ω_s：阻带边缘频率。

ω_c：3dB 带宽（边缘）频率，表示滤波器通带幅度增益从最大值下降 3dB 时，对应的频率点。

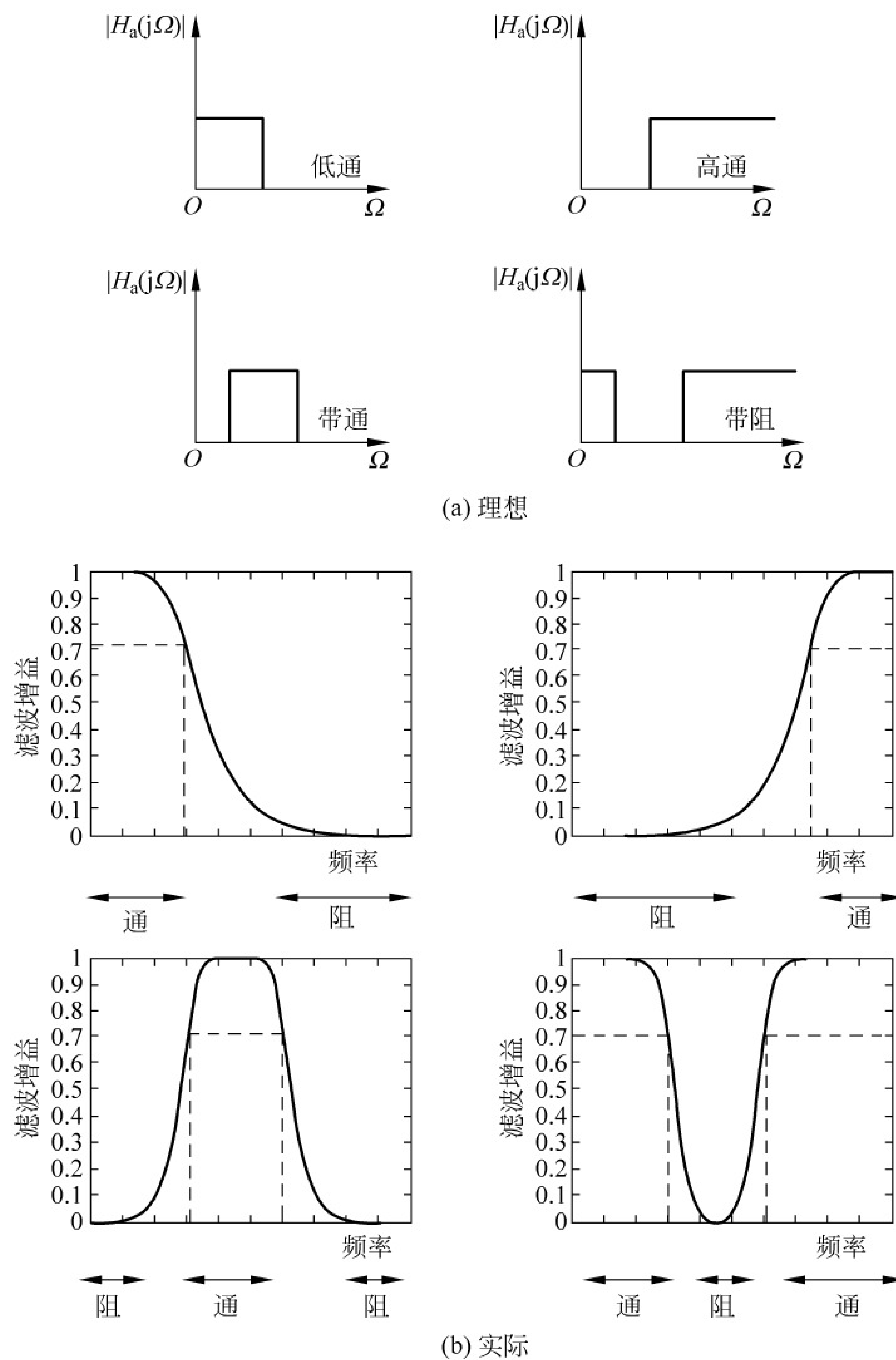


图 6-1 模拟滤波器的幅频特性

$\alpha_p=20\lg\left[\dfrac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|}\right]=-20\lg(1-\delta_1)$，称为通带最大增益衰减。

$\alpha_s=20\lg\left[\dfrac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|}\right]=-20\lg\delta_2$，称为阻带最小增益衰减。

幅频响应的误差容限 δ_1、δ_2 为滤波器通带和阻带的波纹参数。δ_1、δ_2 和滤波器的幅频特性关系如下：

通带 $\quad 1-\delta_1\leqslant|H(e^{j\omega})|\leqslant 1,\quad \omega\in[0,\omega_p]$

阻带 $\quad |H(e^{j\omega})|\leqslant\delta_2,\quad \omega_s\leqslant\omega\leqslant\pi$

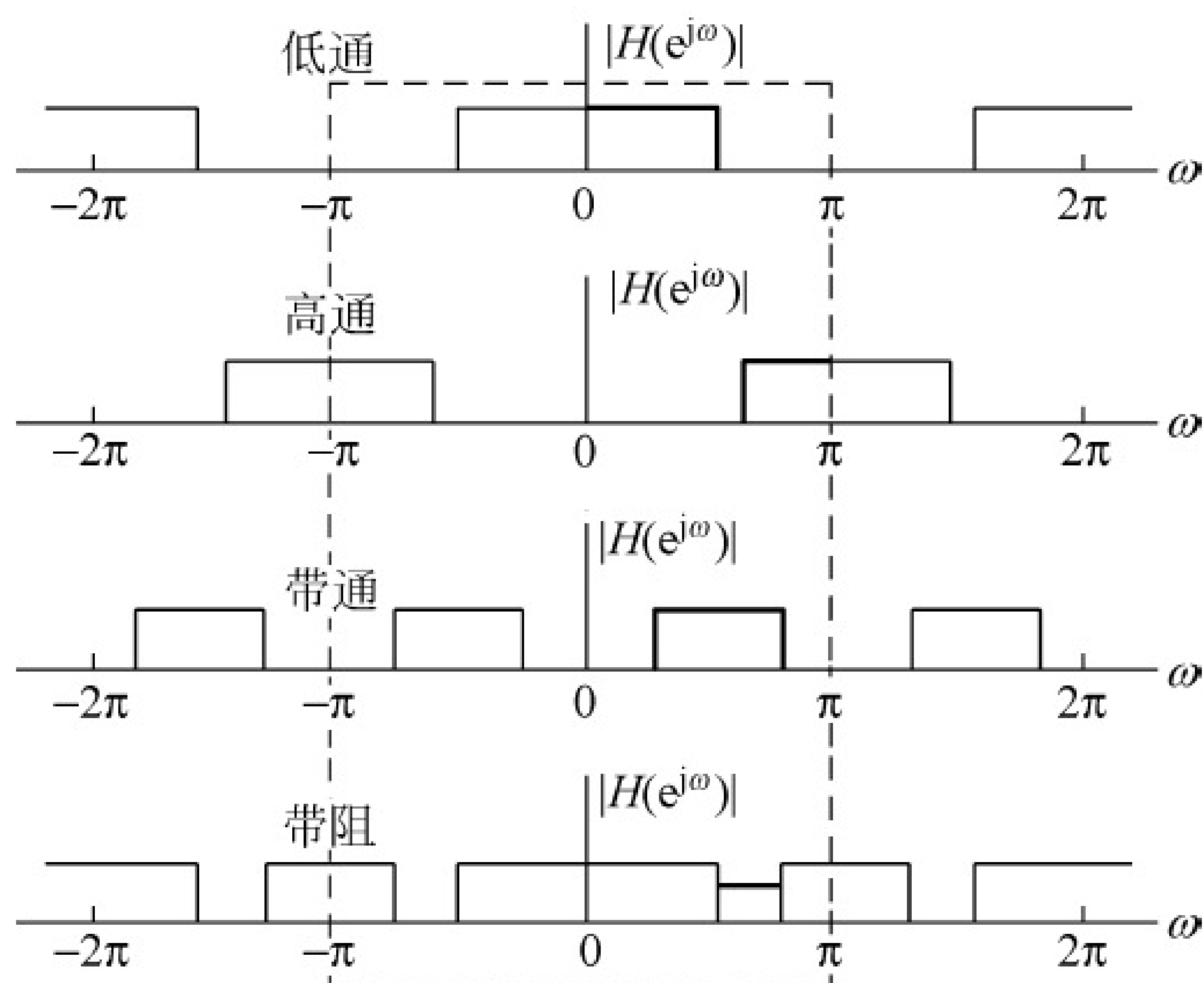


图 6-2 数字 LPF、BPF、HPF、BSF 理想幅频特性

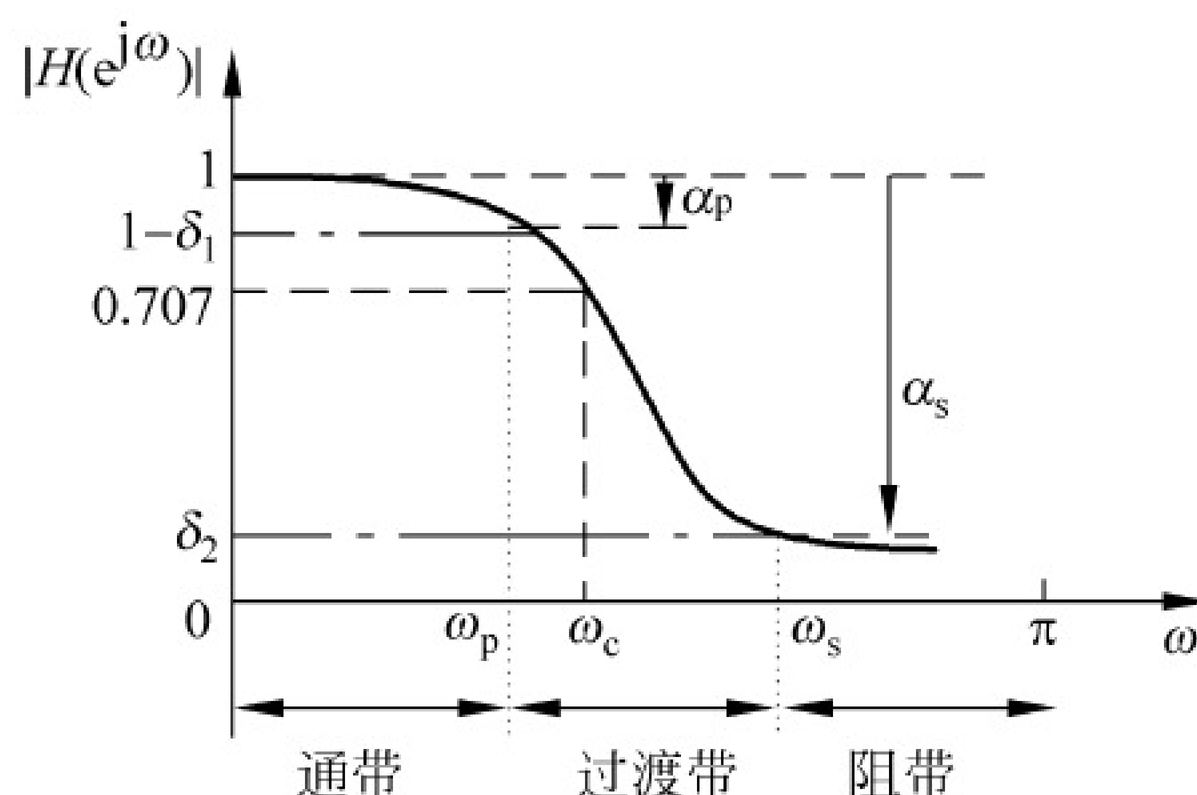


图 6-3 数字 LPF 相关参数定义

3. 数字滤波器的设计原则

1）数字滤波器的设计目的

（1）实现具有特定功能的 LTI 离散时间系统。

（2）用数字滤波器代替传统模拟滤波器。

2）数字滤波器的设计原则

（1）按任务的要求，确定滤波器的性能指标。

（2）用因果稳定的离散时间 LTI 系统的系统函数逼近这一性能指标。数字系统类型可在 IIR 滤波器、FIR 滤波器间选择，设计出满足要求的系统函数 $H(z)$。

（3）利用有限精度算法来实现该系统函数。包括选择、确定下列具体内容：

① 运算结构（典型型、频率采样型等）；

② 合适字长（关系到滤波器系数、I/O 变量、中间变量的量化精度）；

③ 有效数字的处理（舍入、截尾）。

（4）实现技术。根据工程特点选择合适的平台实现方案和技术，例如公共平台上的软件、通用数字信号处理器（DSP）芯片或专用的 DSP 芯片等。

3）IIR 滤波器的设计方法

（1）间接法：设计或选择已有的模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$，通过适当的转换方法将 $H_a(s)$ 转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$。主要有脉冲响应不变法、双线性变换法。

（2）直接设计（计算机辅助设计）：主要有零极点累试法、频域直接设计（使所设计的数字滤波器幅度响应与要求的幅度响应间的平方误差最小，可以在频域保证关键频点的响应）、时域直接设计（使所设计的数字滤波器单位采样脉冲响应与要求的单位采样脉冲响应之间的均方误差最小，在时域保证输出波形要求）。

6.1.2 模拟滤波器的设计

1. 滤波器的特征分类

根据设计的模拟（数字）滤波器幅度频率响应通带、阻带的函数特征，主要可分为以下 3 种类型。

1）巴特沃斯(Butterworth)型

巴特沃斯型模拟 LPF 幅频特性如图 6-4 所示，幅频特性在整个频率范围内单调下降。设计指标为 3dB 截止频率 $\Omega_c=\Omega_{3dB}$和阶次 N。

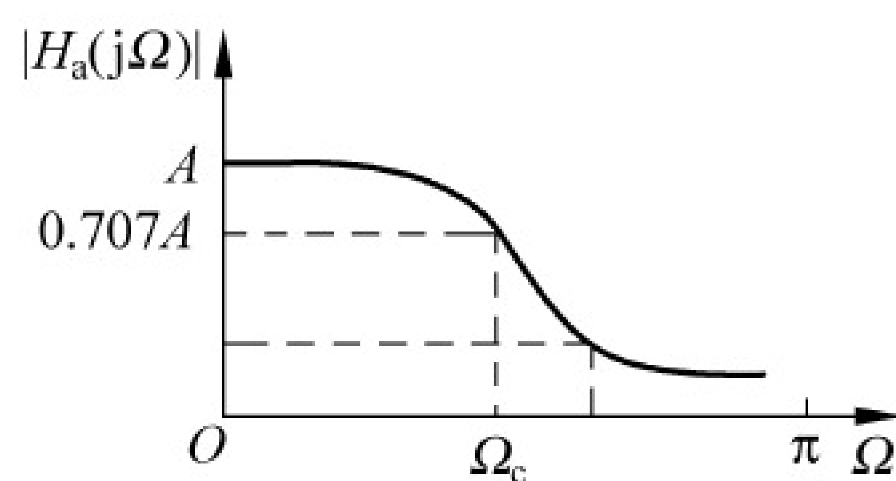


图 6-4　巴特沃斯型模拟 LDF 的幅频特性

2）切比雪夫(Chebyshev)型

切比雪夫Ⅰ型、切比雪夫Ⅱ型模拟 LPF 幅频特性如图 6-5 所示，幅频特性在通带(Ⅰ型)或阻带(Ⅱ型)有等波纹，阻带(Ⅰ型)或通带(Ⅱ型)是单调的。幅频特性由切比雪夫多项式确定。设计指标有通带宽度 Ω_p(一般可以不等于 Ω_{3dB})、阶次 N 和参数 ε。

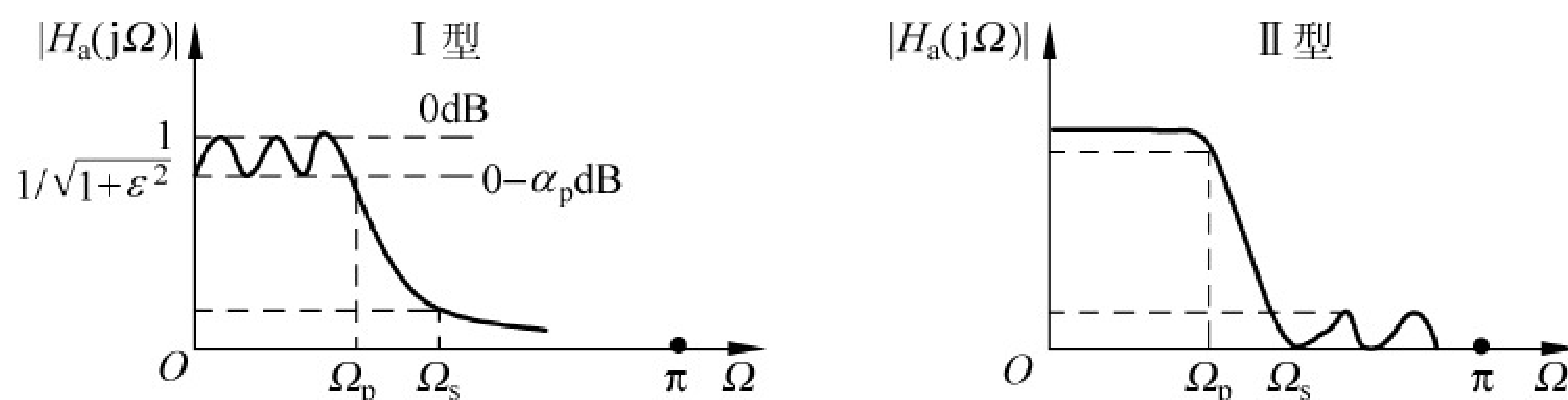


图 6-5　切比雪夫Ⅰ型、切比雪夫Ⅱ型模拟 LDF 的幅频特性

3）椭圆(Elliptic)型

椭圆型模拟 LPF 幅频特性如图 6-6 所示，幅频特性在通带和阻带均有等波纹波动。幅频特性由雅可比椭圆函数确定。设计指标有通带波纹 δ_1(对应着通带增益衰减 α_p)、阻带波纹 δ_2(对应着阻带增益衰减 α_s)、通带截止频率 Ω_p 和阻带截止频率 Ω_s。

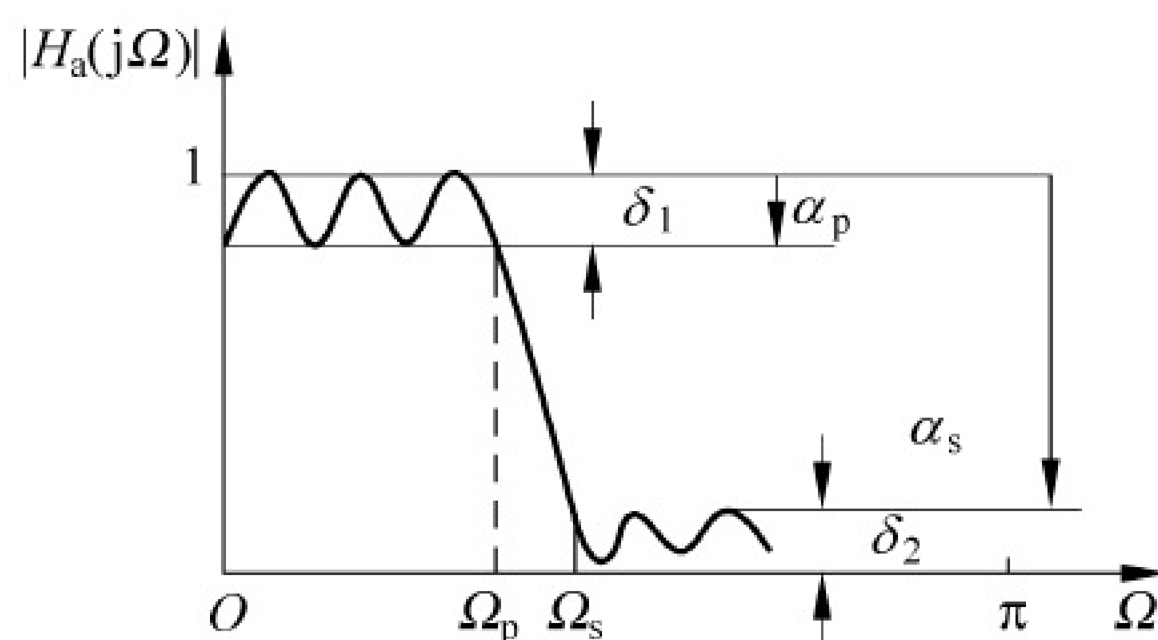


图 6-6　椭圆型模拟 LPF 的幅频特性

2．模拟滤波器的设计

1）模拟 LPF 设计指标

(1) 通带截止频率 Ω_p。

(2) 阻带截止频率 Ω_s。

(3) 通带增益最大衰减系数 α_p：

$$\alpha_p = 20\lg\left[\frac{|H(j0)|}{|H(j\Omega_p)|}\right]$$

（4）阻带增益最小衰减系数 α_s：

$$\alpha_s = 20\lg\left[\frac{|H(j0)|}{|H(j\Omega_s)|}\right]$$

（5）3dB 截止频率 Ω_c：滤波器通带增益下降 3dB 时对应的频率点。

特别提示：设一个稳定的因果模拟滤波器传输函数为 $H_a(s)$，其幅度二次方函数满足

$$|H_a(j\Omega)|^2 = H_a(s)H_a(-s)|_{s=j\Omega} = H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \tag{6.1.2}$$

且因稳定的 $H_a(s)$ 的极点必须在 s 平面的左半平面，相应地 $H_a(-s)$ 的极点落在右半平面。

2）巴特沃斯模拟低通滤波器设计

（1）由给定技术指标 Ω_p、α_p、Ω_s、α_s，求滤波器的阶数 N。

归一化巴特沃斯模拟 LPF 的振幅二次方函数为

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \tag{6.1.3}$$

令 $\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}$，$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}$，求得

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} \tag{6.1.4}$$

当计算的 N 有小数时，取大于 N 的最小整数。巴特沃斯模拟 LPF 幅频特性和阶次 N 的关系如图 6-7 所示。

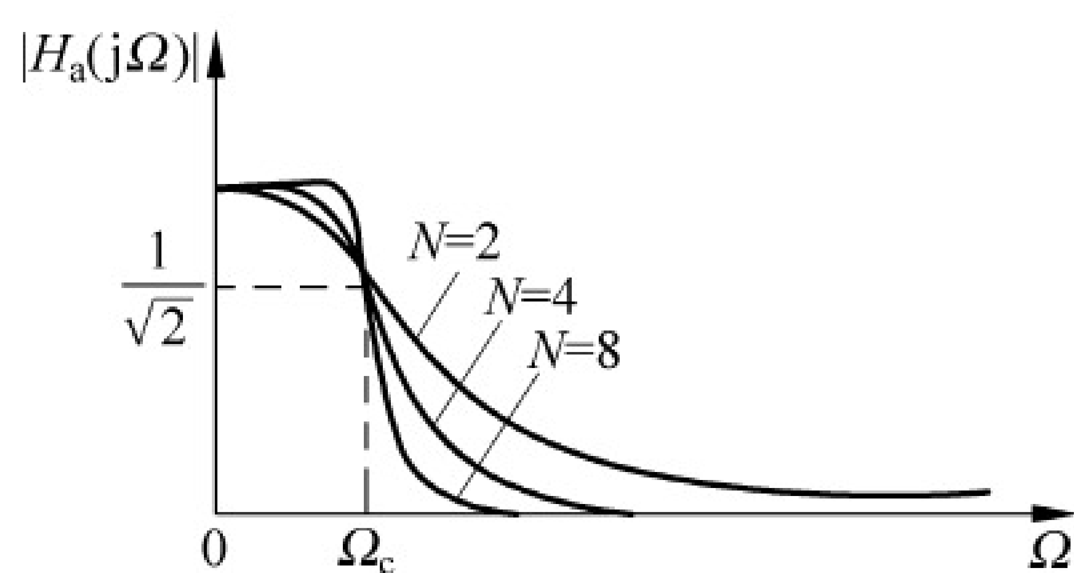


图 6-7 巴特沃斯模拟 LPF 幅度特性和 N 的关系

（2）求归一化传输函数 $H_a(p)$。

令归一化频率 $\lambda=\frac{\Omega}{\Omega_c}$，归一化拉普拉斯复变量 $p=j\lambda$，则归一化巴特沃斯模拟 LPF 传输函数为

$$H_a(p) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{N-1}(p-p_k)} \tag{6.1.5}$$

或如式(6.1.6)所示的有理分式形式。

$$H_a(p) = \frac{1}{b_0+b_1p+b_2p^2+b_3p^3+\cdots+b_{N-1}p^{N-1}+p^N} \tag{6.1.6}$$

式(6.1.5)中归一化的极点 p_k，$k=0,1,2,\cdots,N-1$，或式(6.1.6)中多项式系数 $b_i(i=0,1,2,\cdots,N-1)$ 可查表 6-1 得到。

(3) 求出滤波器的 3dB 截止频率 Ω_c，将 $H_a(p)$ 去归一化，得到实际的模拟滤波器传输函数 $H_a(s)$。

由 N、Ω_p 或 Ω_s 求 Ω_c，如式(6.1.7)或式(6.1.8)所示。

$$\Omega_c=\Omega_p(10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1)^{-\frac{1}{2N}} \tag{6.1.7}$$

$$\Omega_c=\Omega_s(10^{\frac{\alpha_s}{10}}-1)^{-\frac{1}{2N}} \tag{6.1.8}$$

将 $p=\dfrac{s}{\Omega_c}$ 代入 $H_a(p)$，整理得到 $H_a(s)$。

表 6-1　巴特沃斯归一化模拟低通滤波器参数

(a) 阶次 N 与对应极点位置的关系

阶数 N	极点位置				
	$p_{0,N-1}$	$p_{1,N-2}$	$p_{2,N-3}$	$p_{3,N-4}$	p_4
1	−1.0000				
2	−0.7071±j0.7071				
3	−0.5000±j0.8660	−1.0000			
4	−0.3827±j0.9239	−0.9239±j0.3827			
5	−0.3090±j0.9511	−0.8090±j0.5878	−1.0000		
6	−0.2588±j0.9659	−0.7071±j0.7071	−0.9659±j0.2588		
7	−0.2225±j0.9749	−0.6235±j0.7818	−0.9010±j0.4339	−1.0000	
8	−0.1951±j0.9808	−0.5556±j0.8315	−0.8315±j0.5556	−0.9808±j0.1951	
9	−0.1736±j0.9848	−0.5000±j0.8660	−0.7660±j0.6428	−0.9397±j0.3420	−1.0000

(b) 阶数 N 与分母多项式系数的关系

阶数 N	分母多项式 $B(p)=p^N+b_{N-1}p^{N-1}+b_{N-2}p^{N-2}+\cdots+b_1p+b_0$								
	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
1	1.0000								
2	1.0000	1.4142							
3	1.0000	2.0000	2.0000						
4	1.0000	2.6131	3.4142	2.613					
5	1.0000	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361				
6	1.0000	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637			
7	1.0000	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940		
8	1.0000	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8642	13.1371	5.1258	
9	1.0000	5.7588	16.5871	31.1634	41.9864	41.9864	31.1634	16.5817	5.7588

3) 切比雪夫模拟低通滤波器设计

切比雪夫模拟低通滤波器具体分 Ⅰ 型、Ⅱ 型两种幅频特性，下面仅以切比雪夫 Ⅰ 型为例，说明切比雪夫模拟 LPF 的设计原理。

(1) 切比雪夫归一化模拟 LPF 原型的振幅二次方函数 $|H_a(j\Omega)|^2$ 为

$$A^2(\Omega)=|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\varepsilon^2C_N^2\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_p}\right)} \tag{6.1.9}$$

其中，滤波器波纹参数 $\varepsilon<1$，$C_N(x)$ 称为 N 阶切比雪夫多项式，其定义如式(6.1.10a)和式(6.1.10b)。

令 $x=\dfrac{\Omega}{\Omega_p}$，则：

$$C_N\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)\equiv C_N(x)$$

$$=\begin{cases}\cos(N\arccos(x)), & |x|\leqslant 1 \quad (6.1.10a)\\ \mathrm{ch}(N\,\mathrm{arch}(x)), & |x|>1 \quad (6.1.10b)\end{cases}$$

其中，$\mathrm{ch}(x)$、$\mathrm{arch}(x)$ 分别为双曲余弦函数和反双曲余弦函数。

(2) 切比雪夫Ⅰ型模拟 LPF 的设计步骤如下。

① 由给定的技术指标求参数 ε，阶数 N。

通常所给滤波器设计指标为通带边缘频率 Ω_p，通带波纹 α_p(单位为 dB)；阻带边缘频率 Ω_s，相对通带增益峰值的最小阻带增益衰减 α_s(单位为 dB)。

求参数 ε：

$$\varepsilon=\left(10^{\frac{\alpha_p}{10}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \tag{6.1.11}$$

求阶数 N，令

$$\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p},\quad k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=\frac{\sqrt{10^{\alpha_s/10}-1}}{\varepsilon}$$

切比雪夫模拟 LPF 的阶次 N 估计如式(6.1.12)所示。

$$N=\frac{\mathrm{arch}(k_{sp})}{\mathrm{arch}(\lambda_{sp})} \tag{6.1.12}$$

② 求归一化 LPF 原型传输函数 $H_a(p)$。

设归一化频率 $\lambda=\dfrac{\Omega}{\Omega_p}$，归一化拉普拉斯复变量 $p=\mathrm{j}\lambda$，则归一化切比雪夫Ⅰ型模拟 LPF 原型传输函数为：

$$H_a(p)=\frac{1}{\varepsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}(p-p_k)} \tag{6.1.13}$$

其中，令 $\xi=\dfrac{\mathrm{arsh}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)}{N}$，$\mathrm{arsh}(x)$ 为反双曲正弦函数。则传输函数中归一化极点如式(6.1.14)所示。

$$p_k=-\mathrm{sh}\xi\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right]+\mathrm{j}\,\mathrm{ch}\xi\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right],\quad k=1,2,\cdots,N \tag{6.1.14}$$

③ 去归一化，得模拟滤波器传输函数 $H_a(s)$。

将 $p=\dfrac{s}{\Omega_p}$ 代入设计出的 $H_a(p)$，得模拟切比雪夫Ⅰ型 LPF 传输函数 $H_a(s)$。

特别提示：

- 切比雪夫模拟 LPF 原型滤波器的阶次 N 和对应的传输函数中的极点位置，也有设计表格可查。有需要的读者可自行查找相关模拟滤波器设计的文献。
- 椭圆型模拟 LPF 的设计，根据给定的幅频特性指标，也有现成的设计公式、设计参数表格可查。

3. 模拟滤波器的频率变换

基于已有的模拟低通滤波器原型传输函数，通过如图 6-8 所示变换流程，可方便地设计出模拟 HPF、BPF、BSF 等。



图 6-8　模拟频率变换法由 LPF 设计其他模拟滤波器的流程

为了叙述频率变换方法设计模拟滤波器的一般性，对本节要采用的相关符号说明如下。

$H(s)$：所需滤波器的传输函数。

$s=\mathrm{j}\Omega$：复拉普拉斯变量。

$\eta=\dfrac{\Omega}{\Omega_c}$：所需滤波器的归一化频率。

Ω_c：通带增益由最大值下降 3dB 时对应的通带边缘频率。

$q=\mathrm{j}\eta$：所需滤波器的归一化的拉普拉斯复变量。

$H(q)$：所需滤波器的归一化传输函数。

$G(s)$：模拟低通滤波器的传输函数。

$s=\mathrm{j}\Omega$：复拉普拉斯变量。

$\lambda=\dfrac{\Omega}{\Omega_c}$：模拟低通滤波器归一化频率。

$p=\mathrm{j}\lambda$：模拟低通滤波器归一化的拉普拉斯复变量。

$G(p)$：模拟 LPF 原型的归一化传输函数。

基于上述相关参数、符号的说明，下面具体介绍频率变换法设计模拟滤波器的原理。

1) 模拟高通滤波器(HPF)设计

设归一化低通滤波器 $G(\mathrm{j}\lambda)$和归一化高通滤波器 $H(\mathrm{j}\eta)$的幅频特性如图 6-9 所示。图中通带、阻带的截止频率均为归一化参数。令低通滤波器频率 λ 从 $+\infty$ 经过阻带截止频率 λ_s、通带截止频率 λ_p 到 0 的幅频特性对应着高通频率 η 从 0 经过阻带截止频率 η_s、通带截止频率 η_p 到 $+\infty$ 的幅频特性，则 λ 和 η 之间的关系为

$$\lambda=\frac{1}{\eta} \tag{6.1.15}$$

从模拟 LPF 转换到模拟 HPF 的设计步骤可总结如下。

(1) 确定 HPF 的指标。对给定的 HPF 要求指标 Ω'_p、α_p、Ω'_s、α_s，将其中的频率参数以 3dB 带宽下通带边缘频率 Ω_c 做归一化，得模拟 HPF 的归一化指标 η_p、η_s。

（2）求对应的 LPF 指标。按式(6.1.15)求 λ_p,λ_s。滤波器通带、阻带增益衰减指标 α_p、α_s 不变。

（3）设计选定类型的归一化 LPF 原型传输函数 $G(p)$。

（4）由 $G(p)$转换并去归一化，求得模拟 HPF 传输函数 $H(s)$

$$H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} \tag{6.1.16}$$

如果模拟滤波器 3dB 截止频率 Ω_c 未指明，可以取工程上给定的通带截止频率为 Ω_c 进行频率归一化和转换。

2）模拟带通滤波器(BPF)设计

设归一化低通滤波器 $G(\mathrm{j}\lambda)$和归一化带通滤波器 $H(\mathrm{j}\eta)$的幅频特性如图 6-10 所示。图中 LPF 的通带、阻带的截止频率均为归一化参数。由频率变换法设计模拟 BPF 的步骤如下：

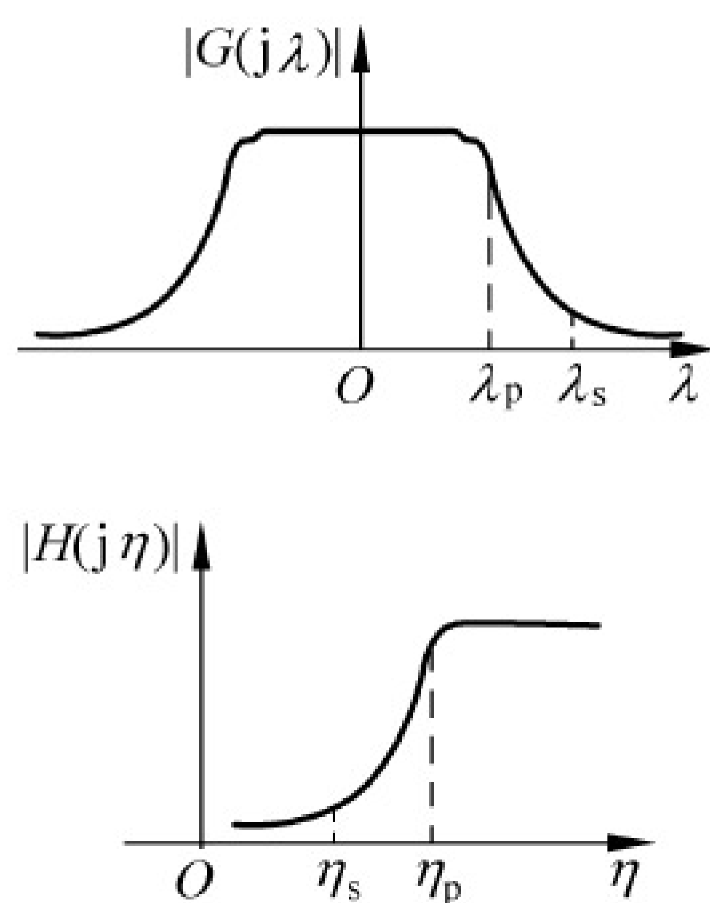


图 6-9　LPF 与 HPF 的幅频特性

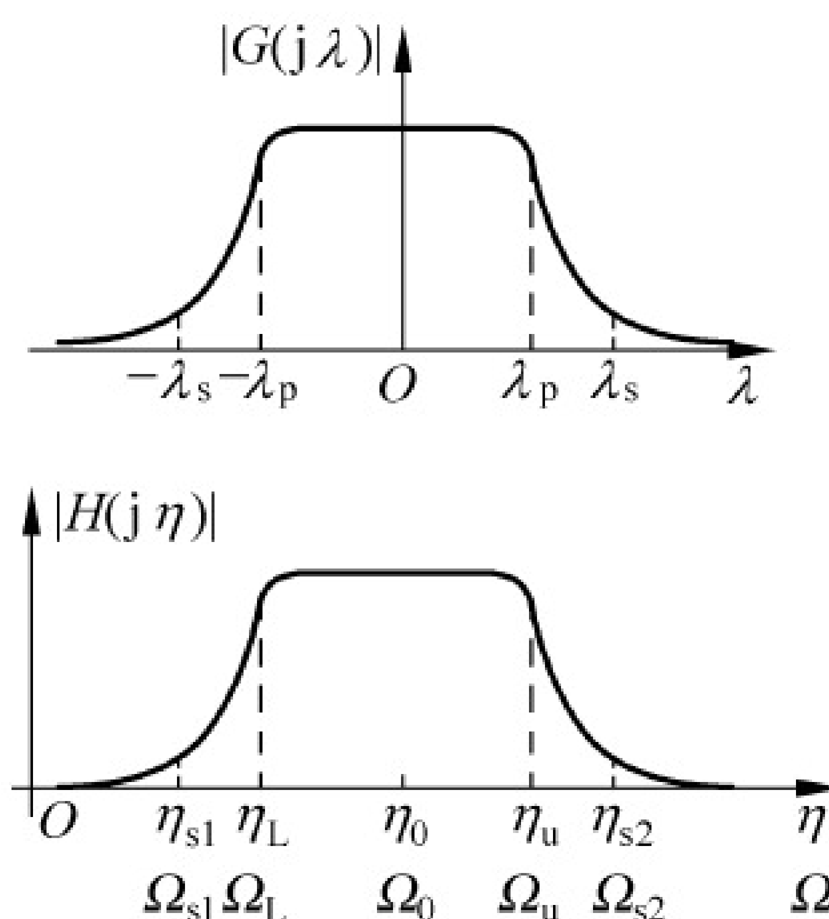


图 6-10　LPF 与 BPF 的幅频特性

（1）确定模拟 BPF 的指标。

要求的模拟 BPF 通带上边缘、下边缘频率分别记为 Ω_u、Ω_L；下阻带上边缘频率 Ω_{s1}；上阻带下边缘频率 Ω_{s2}。模拟 BPF 通带的增益最大衰减 α_p、阻带的增益最小衰减 α_s。

令 $B=\Omega_u-\Omega_L$ 为 BPF 的通带宽度，$\Omega_0^2=\Omega_u\Omega_L$ 为 BPF 的通带中心频率二次方。

带通滤波器设计常取对通带带宽 B 的归一化边缘频率：

$$\eta_{s1}=\frac{\Omega_{s1}}{B},\quad \eta_L=\frac{\Omega_L}{B}$$

$$\eta_u=\frac{\Omega_u}{B},\quad \eta_{s2}=\frac{\Omega_{s2}}{B}$$

$\eta_0=\dfrac{\Omega_0}{B}$为归一化的通带中心频率。

带通滤波器和低通滤波器的归一化边缘频率的对应关系为

$$\lambda=\frac{(\eta^2-\eta_0^2)}{\eta} \tag{6.1.17}$$

即低通滤波器频率 λ 从 $-\infty$ 经过 $-\lambda_s$、$-\lambda_p$ 到 0，然后经 λ_p、λ_s 到 $+\infty$ 的幅频特性对应着带通滤波器频率 η 从 0 经过 η_{s1}、η_L、η_0、η_u、η_{s2} 到 $+\infty$ 的幅频特性，如表 6-2 所示。

表 6-2　模拟带通滤波器和模拟低通滤波器归一化边缘频率的对应关系

LPF	λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0	λ_p	λ_s	$+\infty$
BPF	η	0	η_{s1}	η_L	η_0	η_u	η_{s2}	$+\infty$

（2）求 BPF 指标对应的 LPF 边缘频率。

$$\lambda_p = 1$$

$$-\lambda_s = \frac{\eta_{s1}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s1}}$$

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}}$$

若$|-\lambda_s| \neq |\lambda_s|$，则选 $\lambda_s = \min(|-\lambda_s|, |\lambda_s|)$。

（3）设计选定类型的归一化模拟 LPF 原型传输函数 $G(p)$。

（4）归一化 LPF 原型传输函数 $G(p)$变换为去归一化的 BPF 传输函数 $H(s)$：

$$H(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_u\Omega_L}{s(\Omega_u-\Omega_L)}} \tag{6.1.18}$$

3）模拟带阻滤波器(BSF)的设计

归一化低通滤波器 $G(j\lambda)$和归一化带阻滤波器 $H(j\eta)$的幅频特性如图 6-11 所示。由频率变换法设计模拟 BSF 的步骤如下。

（1）确定模拟 BSF 的设计指标。

要求的 BSF 通带的上边缘、下边缘的截止频率分别记为 Ω_u、Ω_L；BSF 的阻带下边缘频率、上边缘频率分别为 Ω_{s1}、Ω_{s2}。BSF 通带增益的最大衰减为 α_p，阻带增益最小衰减为 α_s。令阻带宽度 $B=\Omega_u-\Omega_L$，阻带中心频率二次方 $\Omega_0^2=\Omega_u\Omega_L$。上述频率指标相对于阻带宽度 B 进行归一化得归一化频率：

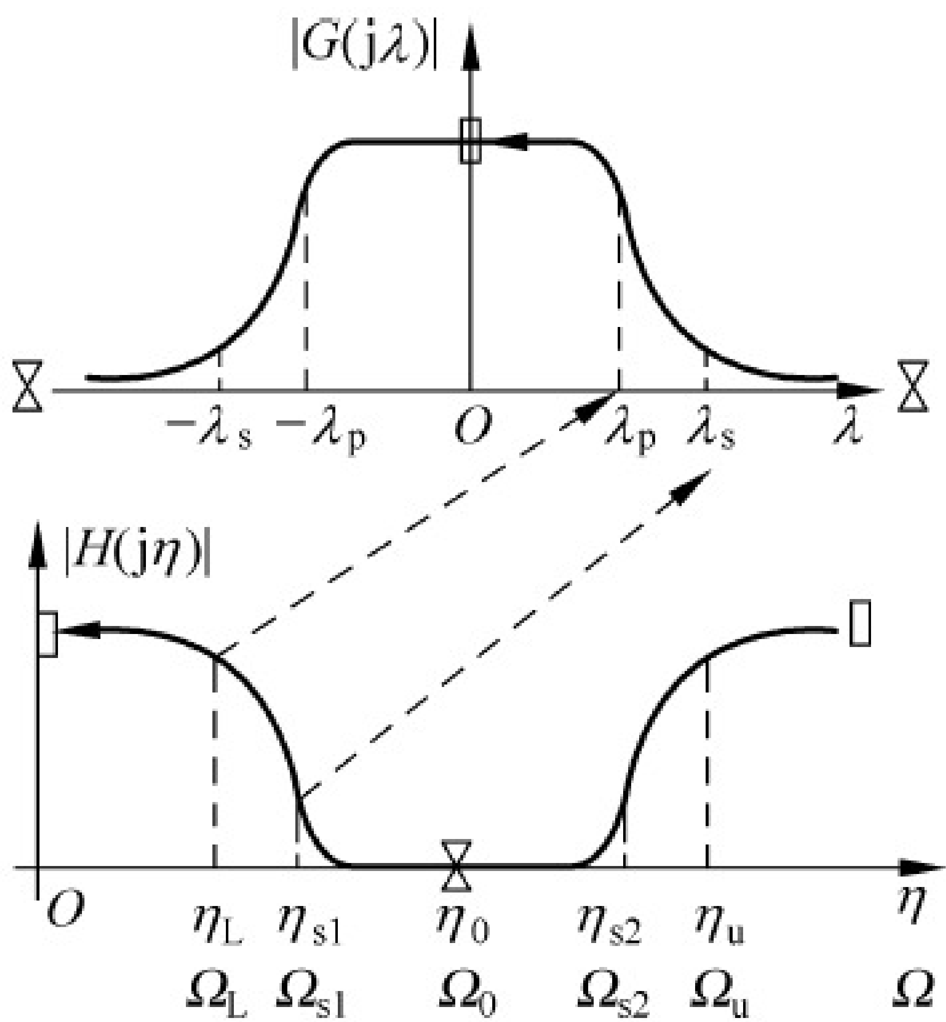


图 6-11　LPF 与 BSF 的幅频特性

$$\eta_L = \frac{\Omega_L}{B}, \quad \eta_u = \frac{\Omega_u}{B}$$

$$\eta_{s1} = \frac{\Omega_{s1}}{B}, \quad \eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B}$$

BSF 的归一化阻带中心频率：

$$\eta_0 = \frac{\Omega_0}{B}, \quad \eta_0^2 = \eta_L\eta_u$$

带阻滤波器和低通滤波器的归一化频率对应关系如式(6.1.19)所示。

$$\lambda = \frac{\eta}{\eta_0^2 - \eta^2} \tag{6.1.19}$$

模拟 LPF、模拟 BSF 的归一化边缘频率间的对应关系如表 6-3 所示。

表 6-3　模拟带阻滤波器和模拟低通滤波器归一化边缘频率的对应关系

LPF	λ	$-\infty$	$-\lambda_s$	$-\lambda_p$	0^-	0^+	λ_p	λ_s	$+\infty$
BSF	η	η_0^+	η_{s2}	η_u	$+\infty$	0	η_L	η_{s1}	η_0^-

（2）确定 BSF 指标对应的 LPF 边缘频率。

$$\lambda_p = 1$$

$$-\lambda_s = \frac{\eta_{s2}}{\eta_0^2 - \eta_{s2}^2}$$

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s1}}{\eta_0^2 - \eta_{s1}^2}$$

若$|-\lambda_s| \neq |\lambda_s|$，则取$\lambda_s = \min(|-\lambda_s|, |\lambda_s|)$。

（3）设计选定类型的归一化 LPF 原型传输函数 $G(p)$。

（4）归一化 LPF 原型传输函数 $G(p)$变换为去归一化的模拟 BSF 传输函数 $H(s)$：

$$H(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{s(\Omega_u - \Omega_L)}{s^2 + \Omega_u \Omega_L}} \tag{6.1.20}$$

6.1.3 IIR LPF 设计：脉冲响应不变法

1. 一般数字滤波器的设计思想

数字滤波器可直接设计，也可间接设计。间接法设计 IIR 滤波器的思想如图 6-12 中实线流程所示。

（1）按一定的频率变换规则将给出的数字滤波器（LPF、HPF、BPF、BSF）性能指标转换为模拟滤波器的性能指标。

（2）根据转换后的技术指标，设计模拟滤波器系统函数 $H(s)$。

（3）按一定的模拟变换域（拉普拉斯域）和数字变换域（z 域）之间的函数变换规则，$s=f(z)$，将 $H(s)$转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$。

脉冲响应不变法和双线性变换法是两种常见的 IIR 滤波器间接设计法。本节以数字 IIR LPF 设计为例，介绍 IIR 滤波器间接法设计的原理。

2. 脉冲响应不变法的变换思想及方法

1）基本思想

保证从模拟 LPF 变换所得的数字 LPF 的单位采样脉冲响应 $h(n)$，是相应的模拟滤波器的单位冲激脉冲响应 $h_a(t)$的等间隔采样。即 $h(n)=h_a(nT)$，其中 T 为时域采样间隔，如图 6-13 所示。

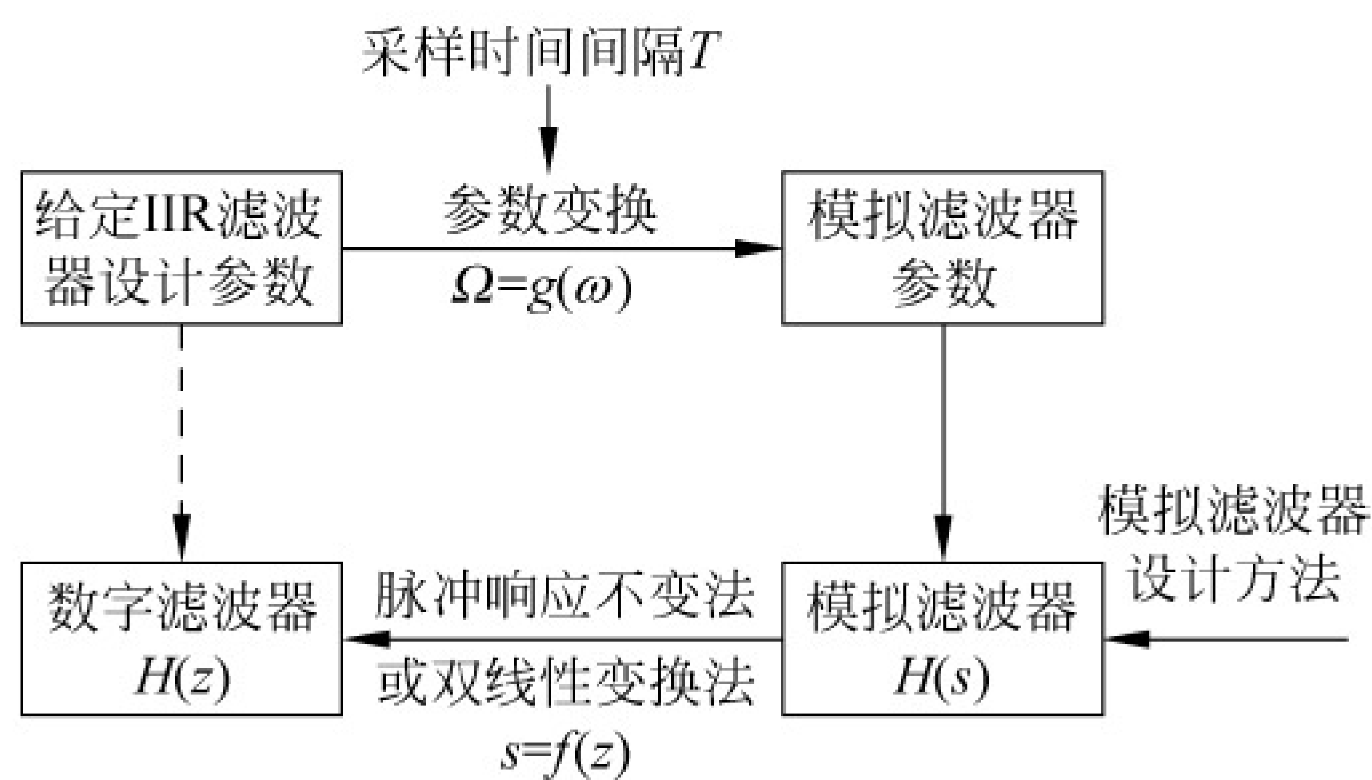


图 6-12　间接法设计 IIR 滤波器的思想

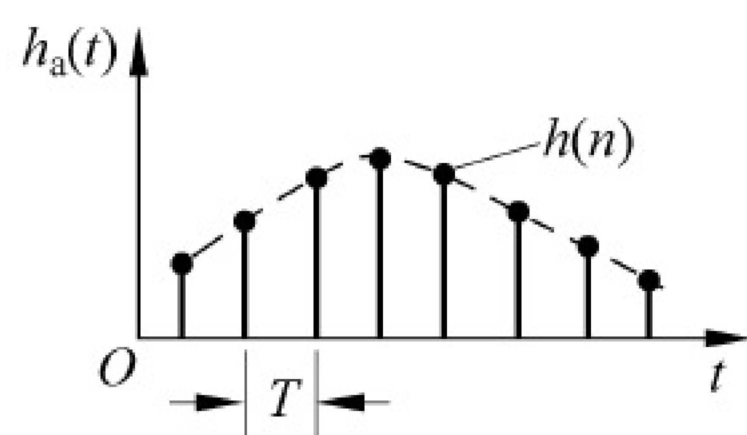


图 6-13　$h_a(t)$（虚线）和 $h(n)$（序列）的关系

2）模拟、数字滤波器系统函数的变换域转换

设模拟滤波器的系统函数如式(6.1.21)所示。

$$H_a(s)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{s+s_i} \tag{6.1.21}$$

通过 $H_a(s)$所在的 s 平面极点 $-s_i$ 向 $H(z)$所在的 z 平面极点 $z=e^{-s_iT}$ 间的映射，将系统函数 $H_a(s)$的部分分式映射成 $H(z)$的部分分式，如式(6.1.22)所示。

$$\frac{1}{s+s_i}\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-s_iT}z^{-1}} \tag{6.1.22}$$

从而得到数字滤波器的 $H(z)$：

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}\frac{A_i}{1-e^{-s_iT}z^{-1}} \tag{6.1.23}$$

3. 脉冲响应不变法的映射关系及特点

1）s 平面与 z 平面复参数的映射关系

令 $s=\sigma+j\Omega$，$z=re^{j\omega}$，其中 Ω、ω 分别对应着模拟域角频率和数字域数字频率，则对 $z=e^{sT}$ 有

$$re^{j\omega}=e^{(\sigma+j\Omega)T}=e^{\sigma T}\ e^{j\Omega T}$$

$$r=e^{\sigma T},\quad \omega=\Omega T$$

当 $\sigma=0$ 时，$r=1$，s 平面的虚轴 $s=j\Omega\rightarrow z$ 平面上的单位圆 $z=e^{j\omega}$。

当 $\sigma<0$ 时，$r<1$，s 平面的左半平面$\rightarrow z$ 平面单位圆内。

当 $\sigma>0$ 时，$r>1$，s 平面的右半平面$\rightarrow z$ 平面单位圆外。

数字频率 ω 自 $0\rightarrow\pm\pi$ 时，模拟域角频率 Ω 对应值为 $0\rightarrow\pm\frac{\pi}{T}$。

如图 6-14 所示，s 平面与 z 平面映射并非一一对应，s 平面上每一条宽为$\frac{2\pi}{T}$的横带，重叠地映射到整个 z 平面上，s 平面复频率 $j\Omega$ 在纵轴上每变化$\frac{2\pi}{T}$，对应于 z 平面上数字频率 ω 绕单位圆变化一周。若原模拟滤波器频率响应不满足带限的特点，$|\Omega|<\frac{\pi}{T}$，如图 6-15 所示，数字滤波器的频响特性在 $\omega=\pi$(数字域最高频点)附近与原模拟滤波器的频响相比，将有“频率混叠失真”。

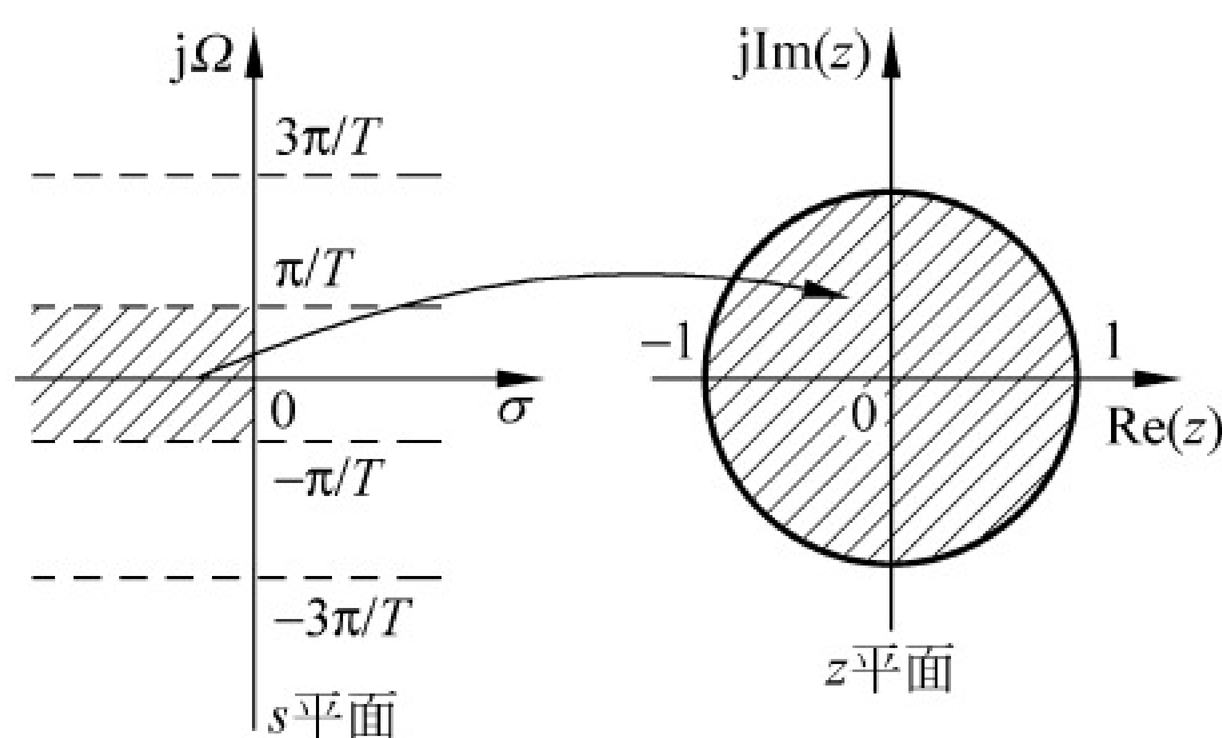


图 6-14 s 平面与 z 平面间的映射关系 $z=e^{sT}$

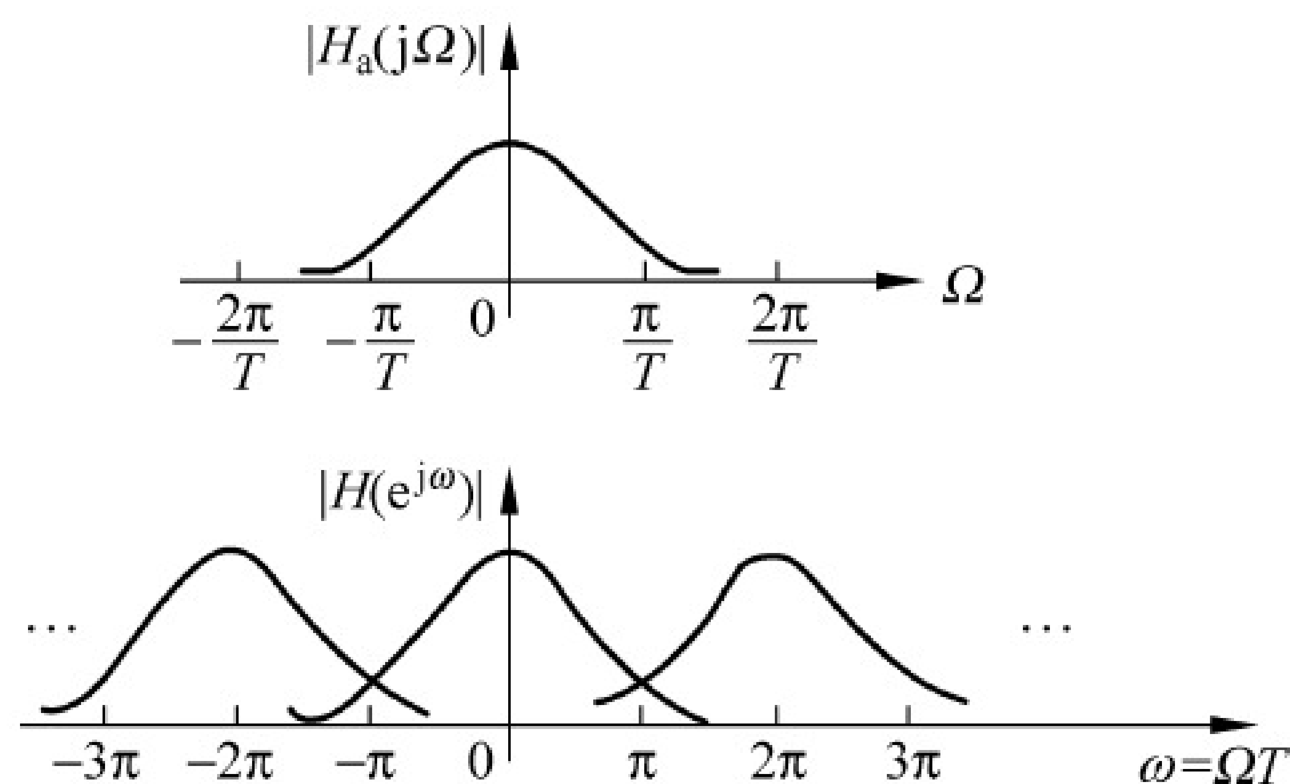


图 6-15 脉冲响应不变法的频率混叠现象

特别提示：设计非带限滤波器，如高通、带阻滤波器，不适合用脉冲响应不变法。

2）脉冲响应不变法设计 IIR 滤波器的特点

（1）频率变换关系 $\omega=\Omega T$ 是线性的，模拟滤波器频响局限于折叠频率以内的频带上，变换后所得数字滤波器频响可不失真地反映原模拟滤波器频响。

（2）主要用于设计要求在时域上能模仿模拟滤波器功能的数字滤波器。

（3）模拟滤波器稳定，变换得到数字滤波器也是稳定的。

6.1.4 IIR LPF 设计：双线性变换法

1. 双线性变换的一般变换关系

1）变换关系

要将模拟滤波器系统函数 $H_a(s)$映射成数字滤波器的 $H(z)$，可采用以下 s、z 复频率之间的双线性变换：

$$s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{6.1.24}$$

其中，T 为时域采样间隔。由式(6.1.24)的变换，可推出模拟域角频率 Ω 和数字域数字频率 ω 间，满足以下频率预畸变换：

$$\Omega=g(\omega)=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \tag{6.1.25}$$

由式(6.1.25)可知，双线性变换采用频率的非线性变换，将模拟 LPF 的整个频带，$\Omega\in(-\infty,\infty)$压缩到折叠频率以内，$\Omega_1\in\left(-\frac{\pi}{T},\frac{\pi}{T}\right)$，再经 $z=e^{sT}$ 变换作数字化，避免了数字滤波器频响的频率混叠失真。

2）双线性变换的特点

（1）s 平面上角频率 Ω 与 z 平面的数字频率 ω 成非线性的正切函数关系。

$\Omega=0$，对应于 $\omega=0$。

$\Omega=\pm\infty$，对应于 $\omega=\pm\pi$。

s 平面整个虚轴（复频率 $j\Omega$）单值地映射成 z 平面的单位圆一周。这种单值映射关系，消除了数字滤波器频响相对于模拟滤波器频响的频率混叠现象。

（2）由于 Ω 与 ω 之间的非线性压缩关系，使设计的数字滤波器的频率响应相对于模拟滤波器的频率响应，出现非线性失真。

（3）如果模拟滤波器是稳定的，则由双线性变换法得到的数字滤波器亦稳定。

（4）模拟滤波器 $H_a(s)$的通带、阻带经双线性变换法映射成数字滤波器 $H(z)$的通带、阻带。

3）双线性变换法将模拟 LPF 转换成数字 LPF 的步骤

（1）确定 IIR LPF 的参数。根据系统采样频率 f_s，将工程应用要求的模拟域指标变换成数字域指标：滤波器通带、阻带边缘频率 ω_p、ω_s，通带增益最大衰减 α_p，阻带增益最小衰减 α_s。

（2）求对应的模拟 LPF 参数。频率响应的边界频率由 $\Omega=g(\omega)=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$计算，$\omega_p\to\Omega_p$，$\omega_s\to\Omega_s$，通带、阻带增益衰减系数不变。

（3）设计模拟 LPF 的系统函数 $H_a(s)$。

（4）用式(6.1.24)，把模拟 LPF 的系统函数 $H_a(s)$转换成数字 LPF 的系统函数 $H(z)$。

2. 间接法设计数字 LPF 时 T 的选择

若在数字域给定数字 LPF 技术指标，则如无特别指定，间接法设计 IIR 低通滤波器常取采样时间间隔 $T=1$。如果已知一个模拟 LPF，通过间接法设计一个类似频响的数字 LPF，则不同的时域采样间隔 T，将会影响数字化后 IIR LPF 频响曲线形状。

3. 双线性变换法、脉冲响应不变法的比较

两者比较如表 6-4 所示。

表 6-4　双线性变换法和脉冲响应不变法比较

比较项目	双线性变换法	脉冲响应不变法
滤波器的频率响应特性	相频特性失真	高频段幅频特性的频率混叠失真
滤波器的频率映射关系	非线性	线性
滤波器的实现结构	把模拟系统函数分解成并联或级联形式	把模拟系统函数分解成并联形式
滤波器的应用场合	设计幅度频率响应为分段常数的系统	设计模仿模拟系统时域单位冲激响应 $h_a(t)$ 波形的数字系统

6.1.5　IIR HPF、BPF、BSF 设计

1. 设计思路

如图 6-16 所示，采用模拟域的频带变换技术，由模拟低通滤波器转换得到模拟 HPF、BPF、BSF，然后经数字化得到各种数字滤波器。模拟低通滤波器是最基本的原型滤波器。

1）低通滤波器的数字化方案

图 6-16 中①所示为双向流程。若给定原型模拟低通滤波器 $H_a(s)$，用脉冲响应不变法或双线性变换法，进行 s 域和 z 域变量代换，令 $s=f(z)$ 代入 $H_a(s)$ 化简。若给定数字低通滤波器的数字域设计指标，则要先用频率转换关系 $\Omega=g(\omega)$ 求出原型模拟低通滤波器设计指标。

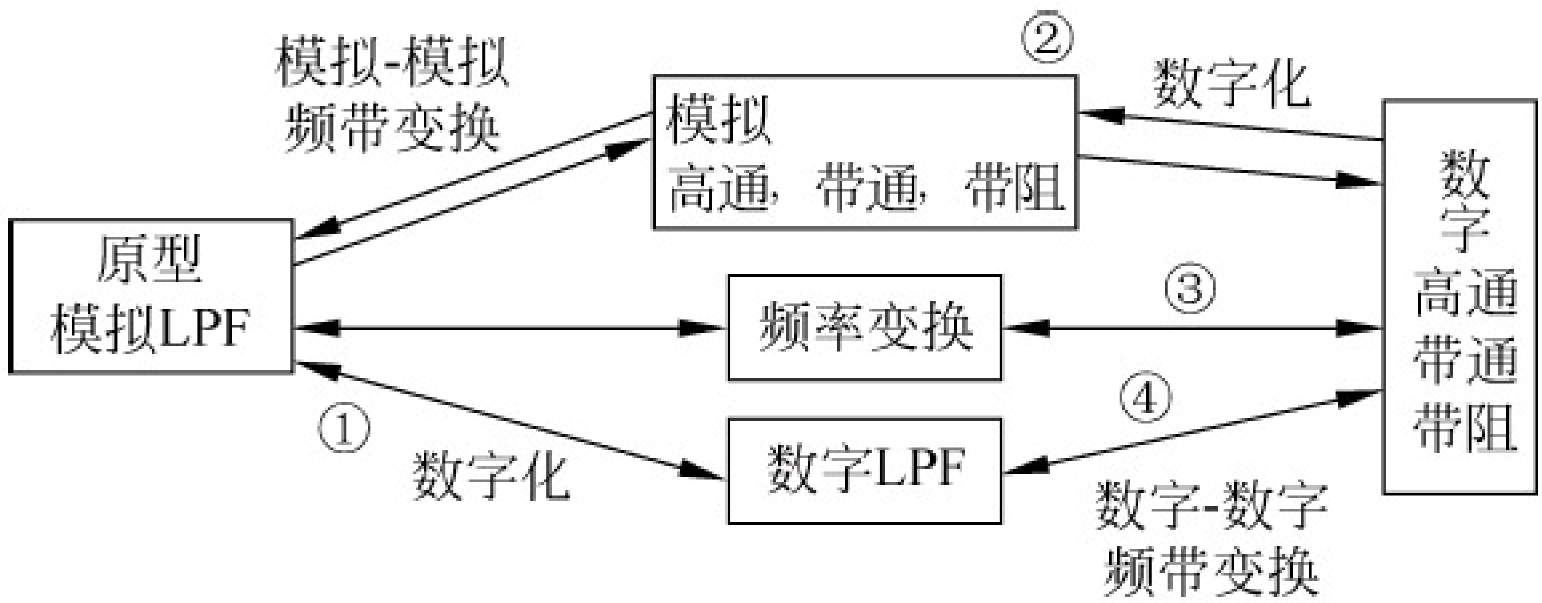


图 6-16　数字 LPF、HPF、BPF、BSF 的设计方案

2）高通、带通、带阻滤波器的数字化方案

图 6-16 中②所示为双向流程。将原型模拟高通、带通、带阻滤波器数字化成数字高通、带通、带阻滤波器。相应原型模拟高通、带通、带阻的设计，可以用模拟域的频率变换方法。

3）频率变换方案

图 6-16 中③所示为双向流程。这种方案是对仅关心滤波器幅频响应的滤波器设计，把方案 2）的“数字化＋模拟频带变换”进行综合，推导出专门的各种“双线性变换”公式。直接用“原型模拟低通滤波器”转换出希望的数字高通、带通、带阻滤波器。

4）数字域设计——z 平面变换法

图 6-16 中④所示为双向流程。这种设计方案是把已知的数字低通滤波器作为“原型滤波器”$H_L(z^{-1})$，推导出数字域(z 域)上的频带变换关系式，根据这些 z 域的频带变换关系，将原型数字低通滤波器转换成希望指标的数字低通滤波器、数字高通、带通、带阻滤波器 $H(z^{-1})$。

2. 频率变换法设计数字高通滤波器

从模拟 LPF 转换成数字 HPF，可采用以下 s 域、z 域间的双线性变换：

$$s = \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \tag{6.1.26}$$

由式(6.1.26)可得数字 HPF 频率 ω 和模拟 LPF 频率 Ω 的变换关系：

$$\Omega = -\frac{T}{2}\cot\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{6.1.27}$$

模拟 LPF 的 $|H_a(j\Omega)|$ 与数字 HPF 的 $|H(e^{j\omega})|$，经频率变换后的映射关系如图 6-17 所示。

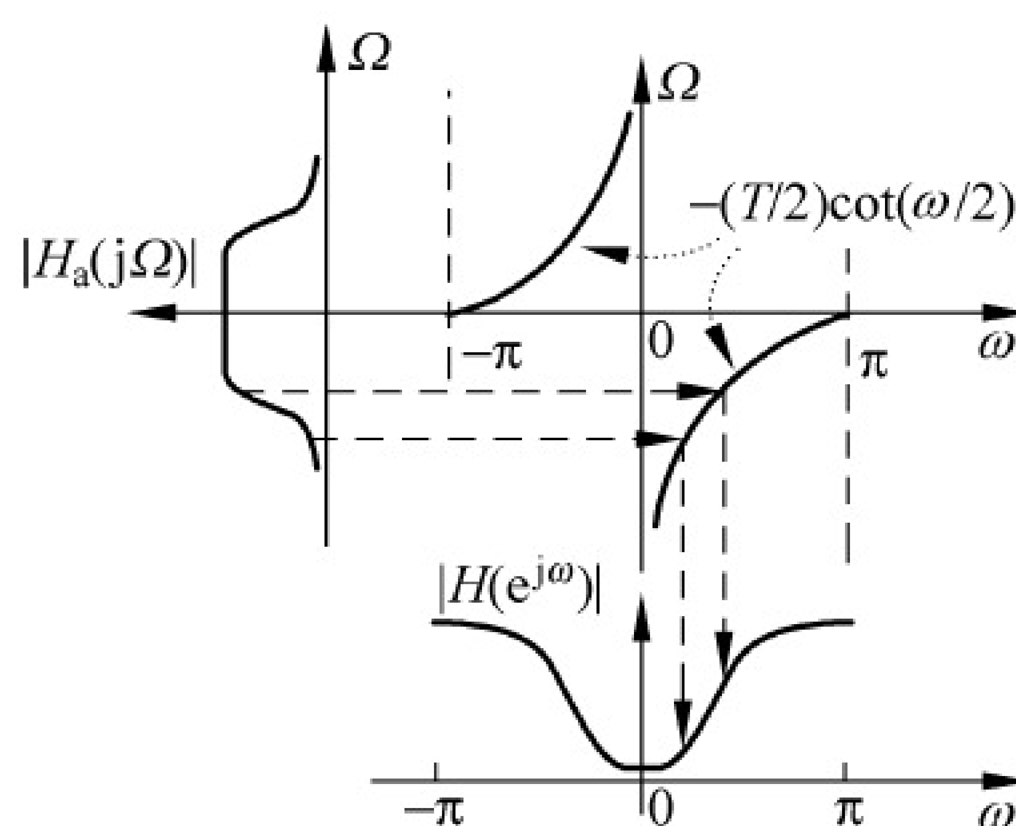


图 6-17 模拟低通与数字高通滤波器幅频特性映射的关系

3. z 平面变换法

给定数字原型 LPF 的系统函数 $H_L(z^{-1})$，通过特定的变换，得到期望的各种不同数字滤波器 $H_d(z^{-1})$，为了区别，将变换前的 z 平面记为 u 平面。从 u 到 z 的映射函数关系表示为

$$u^{-1} = G(z^{-1}) \tag{6.1.28}$$

则

$$H_d(z^{-1}) = H_L(u^{-1})\big|_{u^{-1}=G(z^{-1})} \tag{6.1.29}$$

变换函数 $G(z^{-1})$ 为 N 阶全通系统：

$$G(z^{-1}) \equiv \pm \prod_{k=1}^{N} \frac{z^{-1}-\alpha_k^*}{1-\alpha_k z^{-1}} \tag{6.1.30}$$

其中，阶数 N 和系数 α_k 由具体设计的滤波器类型及参数决定。

6.1.6 IIR 滤波器直接设计法

数字滤波器的直接设计法是优化方法，借助计算机平台的数值运算，在频域或时域用设计出的数字滤波器系统函数或单位采样脉冲响应逼近给定的滤波器系统特性。

1. 频域直接设计法

频域直接设计法主要有零点、极点累试法和幅度特性二次方误差最小法。设 $H_d(e^{j\omega})$、$H(e^{j\omega})$ 分别是希望的 IIR 滤波器频响和实际设计出的 IIR 滤波器频响。

1）零点、极点累试法设计步骤

(1) 因为数字滤波器的极点位置影响幅频响应的峰值位置和尖锐程度；零点位置影响其谷值位置和凹下程度。所以根据希望的 IIR 滤波器频响 $H_d(e^{j\omega})$ 波形，估计零点、极点的初始位置。

(2) 按估计的零点、极点写出拟设计滤波器的系统函数 $H(z^{-1})$；将得到的滤波器频率响应 $H(e^{j\omega})$ 与已知的期望频响 $H_d(e^{j\omega})$ 比较。

(3) 反复修改零点、极点的位置，直到比较结果满足误差要求。

> **特别提示：** 极点的设置必须在 z 平面单位圆内，复数零点、极点应共轭成对。

2) 幅度特性二次方误差最小法设计步骤

(1) 给定希望的 IIR 滤波器频响 $H_d(e^{j\omega})$；

(2) 写出拟设计 IIR 滤波器 K 个二阶节(SOS)级联形式：

$$H(z^{-1}) = A\prod_{i=1}^{K}\frac{1+a_i z^{-1}+b_i z^{-2}}{1+c_i z^{-1}+d_i z^{-2}} \tag{6.1.31}$$

共有 $4K+1$ 个实系数待求。

(3) 在$[0,\pi]$上取希望的 IIR 滤波器频响和如式(6.1.31)所示滤波器频响的 N 个采样：$H_d(e^{j\omega_i})$，$H(e^{j\omega_i})$，$i=1,2,\cdots,N$，一般 $N\gg K$。

(4) 定义幅度特性二次方误差函数

$$E = \sum_{i=1}^{N}[\,|H(e^{j\omega_i})|-|H_d(e^{j\omega_i})|\,]^2 \tag{6.1.32}$$

(5) 初选 $4K+1$ 个实系数$\{A,a_i,b_i,c_i,d_i,i=1,2,\cdots,K\}$代入式(6.1.31)，由式(6.1.32)计算误差 E，与允许误差比较，不断修正这些系数，直到误差满足要求。

> **特别提示：** 稳定系统的极点在 z 平面单位圆内，所以要注意检验并修正在 z 平面单位圆外的极点 z_p。一般用其倒数极点替代 z 平面单位圆外的极点。

2. 时域优化设计

用设计出的 IIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 充分逼近给定系统的单位采样脉冲响应 $h_d(n)$。具体步骤如下：

(1) 给定希望的 IIR 数字滤波器的单位采样脉冲响应 $h_d(n)$，理论上是无穷长的。

(2) 写出拟设计的 IIR 滤波器的传输函数：

$$H(z^{-1}) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \tag{6.1.33}$$

一般取 $a_0=1$，$\{a_i,b_j,i=1,2,\cdots,N;\ j=0,1,2,\cdots,M\}$ 共 $N+M+1$ 个系数待求。

(3) 取 $h(n)=h_d(n)$，$n=0,1,\cdots,p$，$p=N+M+1$。

(4) 将 $H(z^{-1})$ 的有理分式展成多项式，令两边 z^{-1} 的同次幂系数相等，得关于拟设计 IIR 滤波器系统函数分母、分子多项式系数的 $N+M+1$ 个代数方程，求解得设计的滤波器系统函数中的待定系数$\{a_i,b_j,i=1,2,\cdots,N;\ j=0,1,2,\cdots,M\}$。

> **特别提示：** 这里只用了给定系统单位采样脉冲响应 $h_d(n)$ 的前 $N+M+1$ 个值。设计出的 IIR 数字滤波器系统函数 $H(z^{-1})$ 所对应的单位采样脉冲响应 $h(n)$，在 $n\geqslant N+M+1$ 时，相对于给定系统单位采样脉冲响应 $h_d(n)$ 的误差可能不满足要求。

6.2 习题解答

6-1 设计一个巴特沃斯模拟低通滤波器，要求其通带截止频率 $f_p=6\text{kHz}$，通带增益最大衰减 $\alpha_p=3\text{dB}$，阻带截止频率 $f_s=12\text{kHz}$，阻带增益最小衰减 $\alpha_s=25\text{dB}$。求出滤波器归一化系统函数 $H_a(p)$ 以及实际的系统函数 $H_a(s)$。

解：

(1) 求滤波器阶数 N：

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}}$$

其中，

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}=\sqrt{\frac{10^{2.5}-1}{10^{0.3}-1}}\approx 17.8$$

$$\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}=\frac{2\pi\times 12\times 10^3}{2\pi\times 6\times 10^3}=2$$

将 k_{sp} 和 λ_{sp} 值代入 N 的计算公式得

$$N=\frac{\lg 17.8}{\lg 2}=4.15$$

所以取 $N=5$。

(2) 求归一化系统函数 $H_a(p)$。由阶数 $N=5$ 直接查表得到 5 阶巴特沃斯归一化低通滤波器系统函数 $H_a(p)$ 为

$$H_a(p)=\frac{1}{p^5+3.2361p^4+5.2361p^3+5.2361p^2+3.2361p+1}$$

或

$$H_a(p)=\frac{1}{(p^2+0.618p+1)(p^2+1.618p+1)(p+1)}$$

(3) 去归一化，由归一化系统函数 $H_a(p)$ 得到实际的滤波器系统函数 $H_a(s)$。由题目已知 $\alpha_p=3\text{dB}$，即得要求的巴特沃斯 LPF 的 3dB 截止频率 $\Omega_c=\Omega_p=2\pi\times 6\times 10^3\text{rad/s}$，所以

$$H_a(s)=H_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

$$=\frac{\Omega_c^5}{(s^2+0.6180\Omega_c s+\Omega_c^2)(s^2+1.6180\Omega_c s-\Omega_c^2)(s+\Omega_c)}$$

6-2 设计一个切比雪夫模拟低通滤波器，要求其通带截止频率 $f_p=3\text{kHz}$，通带增益最大衰减 $\alpha_p=0.2\text{dB}$，阻带截止频率 $f_s=12\text{kHz}$，阻带增益最小衰减 $\alpha_s=50\text{dB}$。求出滤波器归一化系统函数 $H_a(p)$ 以及实际的 $H_a(s)$。

解：

(1) 确定滤波器技术指标：

$$\alpha_p=0.2\text{dB},\quad \Omega_p=2\pi f_p=6\pi\times 10^3\text{rad/s}$$

$$\alpha_s=50\text{dB},\quad \Omega_s=2\pi f_s=24\pi\times 10^3\text{rad/s}$$

因题目未给出要求设计的模拟滤波器的 3dB 截止频率，故对该拟设计滤波器通带边缘频率进行归一化，得归一化的频率参数：

$$\lambda_p = 1, \quad \lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = 4$$

(2) 求切比雪夫滤波器的阶数 N 和 ε：

$$N = \frac{\text{arch}(k_{sp})}{\text{arch}(\lambda_s)}$$

其中，arch(・)表示反双曲余弦函数，且依题意：

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s} - 1}{10^{0.1\alpha_p} - 1}} = \sqrt{\frac{10^{0.1\times 50} - 1}{10^{0.1\times 0.2} - 1}} \approx 1456.65$$

$$N = \frac{\text{arch}1456.65}{\text{arch}4} = 3.8659$$

为了满足指标要求 N 取 4。

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0.1\alpha_p} - 1} = \sqrt{10^{0.1\times 0.2} - 1} = 0.2171$$

(3) 求归一化系统函数 $H_a(p)$：

$$H_a(p) = \frac{1}{\varepsilon \cdot 2^{N-1} \prod_{k=1}^{N} (p - p_k)}$$

其中，极点由极点计算公式得

$$p_k = -\text{sh}(\xi)\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] + \text{j}\,\text{ch}(\xi)\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right], \quad k = 1,2,\cdots,N$$

其中，$\xi = \frac{1}{N}\text{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{4}\text{arsh}\left(\frac{1}{0.2171}\right) = 0.558$，故

$$p_1 = -0.2248 + 1.0715\text{j}, \quad p_2 = -0.5427 + 0.4438\text{j},$$
$$p_3 = -0.5427 - 0.4438\text{j}, \quad p_4 = -0.2248 - 1.0715\text{j}$$

$$H_a(p) = \frac{1}{0.2171 \times 2^{4-1} \prod_{k=1}^{4} (p - p_k)}$$

合并共轭成对的极点，得实系数系统函数：

$$H_a(p) = \frac{1}{1.7368(p^2 + 0.4496p + 1.1986)(p^2 + 1.0854p + 0.4915)}$$

注意：MATLAB 软件中，双曲正弦函数、双曲余弦函数分别为库函数 sinh(・)、cosh(・)；反双曲正弦函数、反双曲余弦函数分别为库函数 asinh(・)、acosh(・)。

(4) 去归一化系统函数 $H_a(p)$，得到实际的滤波器系统函数 $H_a(s)$为：

$$\begin{aligned} H_a(s) &= H_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} \\ &= \frac{1}{1.7368(p^2 + 0.4496p + 1.1986)(p^2 + 1.0854p + 0.4915)}\Bigg|_{p=\frac{s}{\Omega_p}} \\ &= \frac{\Omega_p^4}{1.7368(s^2 + 0.4496\Omega_p s + 1.1986\Omega_p^2)(s^2 + 1.0854\Omega_p s + 0.4915\Omega_p^2)} \\ &= \frac{\Omega_p^4}{1.7368 \prod_{k=1}^{4} (s - s_k)} \end{aligned}$$

其中，$s_k = \Omega_p p_k = 6\pi \times 10^3 p_k$。因为 $p_1 = p_4^*$，$p_2 = p_3^*$，所以 $s_1 = s_4^*$，$s_2 = s_3^*$，将两对共轭极点

对应的因子相乘，得到分母为二阶因子的形式，其系数全为实数。代入已知数值得：

$$H_a(s)=\frac{7.2687\times10^{16}}{(s^2+8.4748\times10^3 s+4.2587\times10^8)(s^2+2.0459\times10^4 s+1.7463\times10^8)}$$

6-3 设计一个巴特沃斯模拟高通滤波器，要求通带截止频率 $f_p=20\text{kHz}$，阻带截止频率 $f_s=10\text{kHz}$；f_p 处滤波器增益最大衰减为 3dB，阻带增益最小衰减 $\alpha_s=15\text{dB}$。求该高通滤波器的系统函数 $H_a(s)$。

解：

（1）确定高通滤波器技术指标：

$$\alpha_p=3\text{dB},\quad f_p=20\text{kHz}$$
$$\alpha_s=15\text{dB},\quad f_s=10\text{kHz}$$

归一化频率为

$$\eta_p=\frac{f_p}{f_c}=\frac{20\times10^3}{20\times10^3}=1$$

$$\eta_s=\frac{f_s}{f_c}=\frac{20\times10^3}{10\times10^3}=0.5$$

（2）确定相应低通滤波器的技术指标要求：

$$\lambda_p=\frac{1}{\eta_p}=1,\quad \alpha_p=3\text{dB}$$

$$\lambda_s=\frac{1}{\eta_s}=2,\quad \alpha_s=15\text{dB}$$

（3）设计相应的归一化低通滤波器系统函数 $G(p)$：

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}=\sqrt{\frac{10^{1.5}-1}{10^{0.3}-1}}=5.547$$

$$\lambda_{sp}=\frac{\lambda_s}{\lambda_p}=2$$

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}=\frac{\lg 5.547}{\lg 2}=2.47$$

所以 $N=3$，查表得到 3 阶巴特沃斯归一化低通滤波器的 $G(p)$ 为

$$G(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

（4）频率变换，将 $G(p)$ 变换成实际的高通滤波器的系统函数 $H(s)$。

$$H(s)=G(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}}=\frac{s^3}{s^3+2\Omega_c s^2+2\Omega_c^2 s+\Omega_c^3}$$

式中，$\Omega_c=2\pi f_c=(2\pi\times20\times10^3)\text{rad/s}=4\pi\times10^4\text{rad/s}$。

6-4 已知模拟滤波器的系统函数为：

（1）$H_a(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

（2）$H_a(s)=\dfrac{1}{2s^2+3s+1}$

试采用脉冲响应不变法和双线性变换法将其转换成数字滤波器的系统函数 $H(z)$。设数字滤波器的时域采样间隔 $T=2\text{s}$。

解：脉冲响应不变法：

（1）$H_a(s)=\dfrac{1}{s^2+s+1}$

直接按脉冲响应不变法设计公式，$H_a(s)$的极点为

$$s_1=-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2},\quad s_2=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H_a(s)=\frac{-j\sqrt{3}/3}{s-\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}+\frac{j\sqrt{3}/3}{s-\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$H(z)=\frac{-j\sqrt{3}/3}{1-e^{\left(-\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)T}z^{-1}}+\frac{j\sqrt{3}/3}{1-e^{\left(-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)T}z^{-1}}$$

将 $T=2s$ 代入上式得

$$H(z)=\frac{-j\sqrt{3}/3}{1-e^{(-1+j\sqrt{3})}z^{-1}}+\frac{j\sqrt{3}/3}{1-e^{(-1-j\sqrt{3})}z^{-1}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{z^{-1}e^{-1}\sin\sqrt{3}}{1-2z^{-1}e^{-1}\cos\sqrt{3}+z^{-2}e^{-2}}$$

（2）$H_a(s)=\dfrac{1}{2s^2+3s+1}=\dfrac{1}{s+\frac{1}{2}}+\dfrac{-1}{s+1}$

$$H(z)=\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}+\frac{-1}{1-e^{-2}z^{-1}}=\frac{z^{-1}(e^{-1}-e^{-2})}{1-z^{-1}(e^{-1}+e^{-2})+z^{-2}e^{-3}}$$

双线性变换法：

数字滤波器系统函数为

（1）$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}},T=2}=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{3+z^{-2}}$

（2）$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}},T=2}=\dfrac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{6-2z^{-1}}$

6-5　设计低通数字滤波器，要求其通带内频率低于 0.2π rad 时，允许幅度增益误差在 1dB 之内；频率在 0.3π rad 到 π rad 之间的阻带增益衰减大于 10dB。试采用巴特沃斯模拟滤波器进行设计，用脉冲响应不变法进行转换，时域采样间隔为 $T=1$ms。

解：数字滤波器指标如下

$$\omega_p=0.2\pi\ \text{rad},\quad \alpha_p=1\text{dB}$$
$$\omega_s=0.3\pi\ \text{rad},\quad \alpha_s=10\text{dB}$$

采用脉冲响应不变法转换，$T=1$ms，对应的模拟低通巴特沃斯滤波器指标为：

$$\Omega_p=0.2\pi\times10^3\ \text{rad/s},\quad \alpha_p=1\text{dB}$$
$$\Omega_s=0.3\pi\times10^3\ \text{rad/s},\quad \alpha_s=10\text{dB}$$

（1）求滤波器阶数 N 及求归一化系统函数 $H_a(p)$：

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}$$

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}=\sqrt{\frac{10-1}{10^{0.1}-1}}=5.896$$

$$\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_p}=\frac{300\pi}{200\pi}=1.5$$

$$N=\frac{\lg 5.896}{\lg 1.5}=4.376$$

取 $N=5$。查表得巴特沃斯模拟滤波器系统函数的归一化低通原型为：

$$H_a(p)=\frac{1}{\prod_{k=0}^{4}(p-p_k)}$$

$$p_0=p_4^*=-0.3090+j0.9511$$

$$p_1=p_3^*=-0.8090+j0.5818$$

$$p_2=-1$$

将 $H_a(p)$部分分式展开：

$$H_a(p)=\sum_{k=0}^{4}\frac{A_k}{(p-p_k)}$$

上式系数为：

$$A_0=-0.1382+j0.4253,\quad A_1=-0.8091-j1.1135,$$
$$A_2=1.8947\quad A_3=-0.8091+j1.1135,$$
$$A_4=-0.1382-j0.4253$$

（2）去归一化系统函数，由 $H_a(p)$得到实际的滤波器系统函数 $H_a(s)$：

$$\Omega_c=\Omega_s(10^{0.1\alpha_s}-1)^{-\frac{1}{2N}}$$
$$=300\pi(10-1)^{-\frac{1}{10}}\text{rad/s}=756.566\text{rad/s}$$

$$H_a(s)=H_a(p)\Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}=\sum_{k=0}^{4}\frac{\Omega_c A_k}{s-\Omega_c p_k}=\sum_{k=0}^{4}\frac{B_k}{s-s_k}$$

其中，$B_k=\Omega_c A_k$；$s_k=\Omega_c p_k$。

（3）用脉冲响应不变法将 $H_a(s)$转换成数字滤波器系统函数 $H(z)$：

$$H(z)=\sum_{k=0}^{4}\frac{B_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}=\sum_{k=0}^{4}\frac{B_k}{1-e^{s_k10^{-3}}z^{-1}}$$

6-6 设计一个高通数字滤波器，要求其通带截止频率为 $\omega_p=0.8\pi$ rad，通带增益衰减不大于3dB，阻带截止频率 $\omega_s=0.5\pi$ rad，阻带增益衰减不小于18dB。试采用巴特沃斯型滤波器实现。

解：

（1）确定数字高通滤波器指标如下

$$\omega_p=0.8\pi\text{ rad},\quad \alpha_p=3\text{dB}$$
$$\omega_s=0.5\pi\text{ rad},\quad \alpha_s=18\text{dB}$$

（2）确定相应模拟高通滤波器指标。取采样间隔 $T=2$s，选用双线性变换法进行频率预畸变换校正，求出模拟高通边界频率为：

$$\Omega_p = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_p}{2} = \tan 0.4\pi \text{ rad/s} = 3.0777\text{rad/s}, \quad \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s}{2} = \tan 0.25\pi \text{ rad/s} = 1\text{rad/s}, \quad \alpha_s = 18\text{dB}$$

(3) 将模拟高通滤波器指标转换成模拟低通的指标，模拟高通的归一化边界频率为：

$$\eta_p = \frac{f_p}{f_c} = 1$$

$$\eta_s = \frac{f_s}{f_c} = 0.3249$$

对应的模拟低通滤波器的技术指标要求；

$$\lambda_p = \frac{1}{\eta_p} = 1, \quad \alpha_p = 3\text{dB}$$

$$\lambda_s = \frac{1}{\eta_s} = 3.0777, \quad \alpha_s = 18\text{dB}$$

(4) 设计归一化低通模拟滤波器系统函数 $G(p)$：

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}} = \sqrt{\frac{10^{1.8}-1}{10^{0.3}-1}} = 7.8614$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 3.0779$$

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = \frac{\lg 7.8614}{\lg 3.0779} = 1.834$$

取 $N=2$，故归一化低通模拟滤波器系统函数 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$$

(5) 频率变换，由归一化低通模拟滤波器系统函数 $G(p)$ 求模拟高通滤波器系统函数 $H_a(s)$：

$$H_a(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{\Omega_c}{s}} = \frac{s^2}{s^2 + 4.3515s + 9.4697}$$

(6) 用双线性变换法将模拟 HPF 系统函数 $H_a(s)$ 转换成 $H(z)$：

$$H(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{14.8194 + 16.9358z^{-1} + 14.8194z^{-2}}$$

6-7 设计一个带通数字滤波器，其通带范围为 0.25π rad 到 0.45π rad，通带内增益最大衰减为 3dB，0.15π rad 以下和 0.55π rad 以上为阻带，阻带内增益最小衰减为 15dB。试采用巴特沃斯型滤波器实现。

解：

(1) 确定数字带通滤波器指标；

$$\omega_u = 0.45\pi \text{ rad}, \quad \omega_L = 0.25\pi \text{ rad}$$

$$\omega_{s2} = 0.55\pi \text{ rad}, \quad \omega_{s1} = 0.15\pi \text{ rad}$$

通带内增益最大衰减 $\alpha_p = 3\text{dB}$，阻带内增益最小衰减 $\alpha_s = 15\text{dB}$。

（2）确定相应模拟滤波器指标，取 $T=2\text{s}$：

$$\Omega_u = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_u}{2} = \tan 0.225\pi \text{ rad/s} = 0.8541\text{rad/s}$$

$$\Omega_L = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_L}{2} = \tan 0.125\pi \text{ rad/s} = 0.4142\text{rad/s}$$

$$\Omega_{s2} = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_{s2}}{2} = \tan 0.275\pi \text{ rad/s} = 1.1708\text{rad/s}$$

$$\Omega_{s1} = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_{s1}}{2} = \tan 0.075\pi \text{ rad/s} = 0.2401\text{rad/s}$$

通带中心频率

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_u\Omega_L} = 0.5948\text{rad/s}$$

带宽

$$B = \Omega_u - \Omega_L = 0.4399\text{rad/s}$$

将各边界频率对 $B=0.4399\text{rad/s}$ 进行归一化，得相应的归一化带通滤波器边缘频率：

$$\eta_u = \frac{\Omega_u}{B} = 1.9416, \quad \eta_L = \frac{\Omega_L}{B} = 0.9416$$

$$\eta_{s2} = \frac{\Omega_{s2}}{B} = 2.6615, \quad \eta_{s1} = \frac{\Omega_{s1}}{B} = 0.5458$$

$$\eta_0 = \eta_u\eta_L = 1.3521$$

（3）由归一化带通滤波器指标确定相应的模拟归一化低通滤波器技术指标：

$$\lambda_s = \frac{\eta_{s2}^2 - \eta_0^2}{\eta_{s2}} = 1.9746$$

归一化通带截止频率，通带、阻带增益衰减为：

$$\lambda_p = 1, \quad \alpha_p = 3\text{dB}, \quad \alpha_s = 15\text{dB}$$

（4）设计模拟归一化低通滤波器系统函数 $G(p)$：

$$k_{sp} = \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}} = \sqrt{\frac{10^{1.5}-1}{10^{0.3}-1}} = 5.547$$

$$\lambda_{sp} = \frac{\lambda_s}{\lambda_p} = 1.9746$$

$$N = \frac{\lg k_{sp}}{\lg \lambda_{sp}} = \frac{\lg 5.547}{\lg 1.9747} = 2.518$$

取 $N=3$，归一化低通模拟滤波器系统函数 $G(p)$ 为

$$G(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

（5）频率转换，将低通滤波器系统函数 $G(p)$ 转换成带通滤波器系统函数 $H_a(s)$：

$$H_a(s) = G(p)\Big|_{p=\frac{s^2+\Omega_0^2}{sB}}$$

$$= \frac{(sB)^3}{(s^2+\Omega_0^2)^3 + 2(s^2+\Omega_0^2)^2 sB + 2(s^2+\Omega_0^2)s^2B^2 + s^3B^3}$$

将 $B=0.4399\text{rad/s}$，$\Omega_0^2=0.3538$ 代入，并整理得：

$$H_a(s) = \frac{0.085s^3}{s^6+1.448s^4+0.9649s^3+0.5123s^2+0.3113s+0.0443}$$

(6) 将 $H_a(s)$转换成 $H(z)$：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{0.085-0.225z^{-2}+0.225z^{-4}-0.085z^{-6}}{4.28-6.36z^{-1}+12.37z^{-2}-15.43z^{-3}+15.04z^{-4}-8.85z^{-5}+1.73z^{-6}}$$

分母零次幂归一化得

$$H(z)=\frac{0.02-0.053z^{-2}+0.053z^{-4}-0.02z^{-6}}{1-1.486z^{-1}+2.889z^{-2}-3.605z^{-3}+3.514z^{-4}-2.068z^{-5}+0.404z^{-6}}$$

6-8　要求从二阶巴特沃斯模拟滤波器原型的系统函数出发，用双线性变换设计出一低通数字滤波器，已知数字低通滤波器的 3dB 截止频率为 100Hz，数字系统采样频率为 1kHz。

解：数字滤波器的 3dB 截止频率 100Hz，对应模拟角频率

$$\Omega_c=2\pi\times100\text{rad/s}=200\pi\ \text{rad/s}$$

采样频率 $f_s=1000\text{Hz}$，采样时间间隔 $T=\frac{1}{f_s}=1\text{ms}$。

归一化的二阶巴特沃斯低通模拟滤波器的系统函数为：

$$H_a(s)=\frac{1}{p^2+\sqrt{2}p+1}=\frac{1}{p^2+1.414p+1}$$

将 $p=\frac{s}{\Omega_c}$代入，得截止频率为 $\Omega_c=200\pi$ rad/s 的二阶巴特沃斯低通模拟原型为

$$H_a(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{200\pi}\right)^2+1.414\left(\frac{s}{200\pi}\right)+1}$$

$$=\frac{3.948\times10^5}{s^2+888.4s+3.948\times10^5}$$

由双线性变换公式

$$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2f_s\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}=2\times10^3\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

进行 s 代换，可得：

$$H(z)=H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

$$=\frac{3.948\times10^5}{\left(2\times10^3\times\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2+888.4\times\left(2\times10^3\times\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+3.948\times10^5}$$

$$=\frac{0.099\times(1+2z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^2+0.444\times(1-z^{-2})+0.099\times(1+z^{-1})^2}$$

$$=\frac{0.099\times(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1.543-1.082z^{-1}+0.655z^{-2}}$$

$$=\frac{0.064\times(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1-1.168z^{-1}+0.424z^{-2}}$$

6-9　某一低通数字滤波器的设计指标和参量要求如下：

(1) 数字滤波器为巴特沃斯型幅频响应，采用双线性变换法设计；

（2）当 0Hz≤f≤2.5Hz 时，滤波器增益衰减小于 3dB；

（3）当 f≥50Hz 时，滤波器增益衰减大于或等于 40dB；

（4）数字系统的采样频率为 200Hz。

试确定该数字 LPF 的系统函数 $H(z)$，并求其每级阶数不超过二阶的级联型系统函数。

解：根据题意

$$T=\frac{1}{f_s}=5\times 10^{-3}\,\mathrm{s}$$

滤波器通带、阻带的边缘数字频率：

$$\omega_c=2\pi f_c T=2\pi\times 2.5\times\frac{1}{200}\mathrm{rad}=\frac{\pi}{40}\mathrm{rad}$$

$$\omega_{st}=2\pi f_{st} T=2\pi\times 50\times\frac{1}{200}\mathrm{rad}=\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$$

采用双线性变换法时，模拟域、数字域频率的转换关系：

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)=400\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

由指标要求得

$$20\lg\left|H_a\left(\mathrm{j}400\tan\left(\frac{\pi}{80}\right)\right)\right|\geqslant -3$$

$$20\lg\left|H_a\left(\mathrm{j}400\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right|\leqslant -40\quad 20\lg\left|H_a(\mathrm{j}400)\right|\leqslant -40$$

又巴特沃斯型滤波器的幅度平方函数为：

$$|H_a(\mathrm{j}\Omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

故

$$20\lg|H_a(\mathrm{j}\Omega)|=-10\lg\left[1+\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]$$

因而

$$-10\lg\left[1+\left(\frac{\mathrm{j}400\tan\left(\frac{\pi}{80}\right)}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\geqslant -3$$

$$-10\lg\left[1+\left(\frac{\mathrm{j}400}{\Omega_c}\right)^{2N}\right]\leqslant -40$$

取等号计算，则有

$$1+\left[\frac{400\tan\left(\frac{\pi}{80}\right)}{\Omega_c}\right]^{2N}=10^{0.3} \qquad ①$$

$$1+\left[\frac{400}{\Omega_c}\right]^{2N}=10^{4} \qquad ②$$

得巴特沃斯滤波器的阶次 N：

$$N=\frac{1}{2}\frac{\lg\left[\frac{(10^{4}-1)}{(10^{0.3}-1)}\right]}{\lg\left[\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{80}\right)}\right]}=1.42$$

取 $N=2$,代入①式使通带边沿频率处增益衰减满足要求,可得

$$\Omega_c=15.7\text{rad/s}$$

$$f_c=\frac{15.7}{2\pi}\text{Hz}=2.5\text{Hz}$$

与题目给定的已知一致。

又二阶归一化模拟巴特沃斯滤波器系统函数为

$$H_a(s)=\frac{1}{p^2+1.414p+1}$$

代入 $p=\frac{s}{\Omega_c}$,求得

$$H_a(s)=\frac{246.5}{s^2+22.2s+246.5}$$

由双线性变换

$$\begin{aligned}H(z)&=H_a(s)\Big|_{s=400\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}\\&=\frac{246.5\,(1+z^{-1})^2}{[400(1-z^{-1})]^2+22.2\times400(1-z^{-2})+246.5\,(1+z^{-1})^2}\\&=\frac{246.5(1+2z^{-1}+z^{-2})}{1.69\times10^5-3.20\times10^5z^{-1}+1.51\times10^5z^{-2}}\\&=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{685.6(1-1.889z^{-1}+0.895z^{-2})}\end{aligned}$$

或者也可将 $N=2$ 代入②式中使阻带边沿频率处增益衰减满足要求,可得

$$\Omega_c=40\text{rad/s},\quad f_c=\frac{40}{2\pi}=6.37\text{Hz}$$

这样可得

$$H_a(s)=\frac{1600}{s^2+40\sqrt{2}s+1600}$$

$$H(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{115.14-198z^{-1}+86.86z^{-2}}$$

为了满足通带、阻带不同的指标要求,Ω_c 先后两次取不同的值,故得到不同的系统传输函数 $H(z)$。当阻带指标等于指标要求时,求出的通带边缘频率处的指标优于指标要求。Ω_c 具体取值应看题目要求。

6-10 要求设计一个二阶巴特沃斯型带阻数字滤波器,设其阻带 3dB 的边带频率分别为 40kHz 和 20kHz,数字系统的采样频率 $f_s=200\text{kHz}$。

解:提示,可按下列步骤设计希望的二阶巴特沃斯型带阻数字滤波器:

(1) 查表得到一阶归一化巴特沃斯低通模拟滤波器原型的系统函数 $H_a(p)$;

（2）根据数字滤波器的截止频率，按双线性变换法得到对应模拟带阻滤波器的通带截止频率；根据这个截止频率，进行模拟域低通滤波器的去归一化并进行到带阻滤波器的频率变换，得到二阶模拟带阻巴特沃斯滤波器的系统函数 $H_a(s)$；

（3）$H_a(s)$通过双线性变换得到二阶巴特沃斯型数字带阻滤波器的系统函数 $H(z)$。

也可以把上述步骤(2)和步骤(3)合并，得到归一化模拟低通滤波器到数字带阻滤波器的改进双线性变换公式，进行设计，具体如下：

由于设计的是二阶数字带阻滤波器，故原型低通滤波器应是一阶的，一阶巴特沃斯归一化原型模拟低通滤波器的系统函数可以查表得

$$H_{LP}(s)=\frac{1}{1+s}$$

其 3dB 截止频率 $\Omega_c=1\text{rad/s}$，则低通变到带阻的变换中所需常数分别为

$$\begin{aligned}D_1&=\Omega_c\tan\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)\\&=\tan\left(\frac{40-20}{2}\times10^3\times2\pi\times\frac{1}{200\times10^3}\right)\\&=0.3249197\end{aligned}$$

$$E_1=\frac{2\cos\left(\dfrac{\omega_2+\omega_1}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)}=\frac{2\cos(0.3\pi)}{\cos(0.1\pi)}=1.236068$$

根据变换公式，代入 $H_{LP}(s)$的表达式和 D_1,E_1，可得数字带阻滤波器系统函数 $H(z)$为

$$\begin{aligned}H(z)&=H_{LP}(s)\Big|_{s=\frac{D_1(1-z^{-2})}{1-E_1z^{-1}+z^{-2}}}\\&=\frac{\dfrac{1}{1+D_1}(1-E_1z^{-1}+z^{-2})}{1-\dfrac{E_1}{1+D_1}z^{-1}+\dfrac{1-D_1}{1+D_1}z^{-2}}\\&=\frac{0.7547627(1-1.236068z^{-1}+z^{-2})}{1-0.9329381z^{-1}+0.5095255z^{-2}}\end{aligned}$$

6-11 需要设计一个数字低通滤波器，通带内幅度特性在数字频率 $\omega_c\leqslant0.3\pi$ rad 范围内增益衰减在 0.75dB 以内，阻带在 ω 为 0.5π rad 到 π rad 之间的频率上，增益衰减至少为 25dB。采用脉冲响应不变法及双线性变换法确定“原型”模拟系统函数及其极点，并求所得到的数字滤波器的系统函数(取时域采样周期 $T=1\text{s}$)。

解：以巴特沃斯滤波器为原型来求解此题。

（1）脉冲响应不变法。

根据题意有

$$20\lg|H(e^{j0.3\pi})|\geqslant-0.75$$
$$20\lg|H(e^{j0.5\pi})|\leqslant-25$$

又

$$|H_a(j\Omega)|^2=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

则有临界条件为$\left(注意\ T=1\text{s},\ \Omega=\frac{\omega}{T}=\omega\right)$

$$1+\left(\frac{0.3\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{0.075}$$

$$1+\left(\frac{0.5\pi}{\Omega_c}\right)^{2N}=10^{2.5}$$

以上两式联解得

$$N=8,\quad \Omega_c=1.047$$

根据极点公式

$$s_k=\Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right]\pi},\quad k=1,2,\cdots,8$$

可以求得此系统函数的极点为

$$s_{1,8}=-0.204\pm j1.027,\quad s_{2,7}=-0.582\pm j0.871$$

$$s_{3,6}=-0.871\pm j0.582,\quad s_{4,5}=-1.027\pm j0.204$$

由此可以得出"原型"模拟滤波器的系统函数的表示式为

$$H_a(s)=\frac{1.2}{(s^2+1.742s+1.047)(s^2+0.408s+1.047)}\times\frac{1}{(s^2+1.164s+1.047)(s^2+2.054s+1.047)}$$

将此系统函数展成部分分式，可得

$$H_a(s)=\sum_{k=1}^{8}\frac{A_k}{s-s_k}\Rightarrow H(z)=\sum_{k=1}^{8}\frac{A_k}{1-e^{s_kT}z^{-1}}$$

其中，若s_k极点的留数为A_k，则s_k^*极点的留数为A_k^*。

（2）双线性变换法。

因为

$$\Omega=\frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

又由题意，可得

$$20\lg\left|H_a\left(j2\tan\left(\frac{0.3\pi}{2}\right)\right)\right|\geqslant-0.75$$

$$20\lg\left|H_a\left(j2\tan\left(\frac{0.5\pi}{2}\right)\right)\right|\leqslant-25$$

由此可得临界条件为

$$1+\left[2\frac{\tan(0.15\pi)}{\Omega_c}\right]^{2N}=10^{0.075}\tag{6.2.1}$$

$$1+\left[2\frac{\tan(0.25\pi)}{\Omega_c}\right]^{2N}=10^{2.5}\tag{6.2.2}$$

以上两式联解得$N=5.524$，可取$N=6$。

若将$N=6$代入式(6.2.2)中，使阻带边沿频率处增益衰减满足要求，可得$\Omega_c=1.238\text{rad/s}$。

根据极点公式

$$s_k=\Omega_c e^{j\left[\frac{1}{2}+\frac{2k-1}{2N}\right]\pi},\quad k=1,2,\cdots,6$$

可得

$$s_{1,6}=-0.32\pm j1.196,\quad s_{2,5}=-0.875\pm j0.875$$
$$s_{3,4}=-1.196\pm j0.32$$

若将 $N=6$ 代入式(6.2.1)中，使通带边沿频率处增益衰减满足要求，可得 $\Omega_c=1.171\text{rad/s}$，对应数字滤波器的截止频率 $\omega_c=2\arctan\left(\frac{\Omega_c T}{2}\right)=1.059\text{rad}=0.337\pi\ \text{rad}$，稍优于要求的通带截止频率 0.3π rad。此时极点应为

$$s_{1,6}=-0.303\pm j1.131,\quad s_{2,5}=-0.828\pm j0.828$$
$$s_{3,4}=-1.131\pm j0.303$$

利用这后一组极点，查表得归一化原型巴特沃斯滤波器的系统函数为

$$H_{a_6}(s)=\frac{1}{1+3.8637033s+7.4641016s^2+9.1416202s^3+7.4641016s^4+3.8637033s^5+s^6}$$

去归一化得

$$H_a(s)=H_{a_6}(s)\bigg|_{s=\frac{s}{\Omega_c}}$$

取 $\Omega_c=1.171\text{rad/s}$，则可求得

$$H(z)=H_a(s)\bigg|_{s=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$
$$=\frac{G(1+z^{-1})^6}{1+Az^{-1}+Bz^{-2}+Cz^{-3}+Dz^{-4}+Ez^{-5}+Fz^{-6}}$$

其中

$$A=-3.0932801,\quad B=6.8156311,\quad C=-8.3580917$$
$$D=5.2010734,\quad E=-1.286456,\quad F=0.0128198$$
$$G=4.55775\times10^{-3}$$

6-12 试设计一个切比雪夫低通滤波器，使其满足下述指标：

(1) 要求滤波器通带内波纹起伏不大于 2dB；

(2) 滤波器截止频率为 40rad/s；

(3) 阻带 52rad/s 处滤波器增益衰减大于 20dB。

解：根据切比雪夫滤波器设计公式，进行设计。

第一步：归一化处理

(1) 归一化原型滤波器截止频率为 1rad/s。因此对截止频率为 40rad/s，所需修正系数为 $\frac{1}{40}$，从而使

$$\Omega_c=40\text{rad/s}\times\frac{1}{40}=1\text{rad/s}$$

(2) 阻带边缘频率 52rad/s。归一化处理

$$\Omega_s=52\text{rad/s}\times\frac{1}{40}=1.3\text{rad/s}$$

第二步：求波纹系数 ε、中间参数 A 和 g

(1) 将通带边缘频率 $\Omega=\Omega_c=1\text{rad/s}$ 代入 N 阶切比雪夫模拟低通滤波器幅频响应公式可得：

$$20\log_{10}|H_N(\mathrm{j}\times 1)| = 20\log_{10}\left[\frac{1}{(1+\varepsilon^2)}\right]^{1/2} = -2$$

所以 $\varepsilon=0.765$。

(2) 将通带边缘频率 $\Omega=\Omega_s=1.3\mathrm{rad/s}$ 代入公式可得：

$$20\log_{10}|H_N(\mathrm{j}\times 1.3)| = 20\log_{10}\left[\frac{1}{(1+A^2)}\right]^{1/2} = -20$$

所以 $A=10$。

(3) 由公式求 g 得：

$$g = \sqrt{(100-1)/0.765^2} = 13.01$$

第三步：求滤波器阶次 N，将上面求得的中间参数代入公式可得

$$N \geqslant \frac{\log_{10}[13.01+\sqrt{(13.01^2-1)}]}{\log_{10}[1.3+\sqrt{(1.3^2-1)}]} = 4.3$$

所以取 $N=5$。

第四步：由公式和切比雪夫滤波器设计参数表可得归一化滤波器系统函数

$$H_5(s) = \frac{k}{b_0+b_1s+b_2s^2+b_3s^3+b_4s^4+s^5}$$

$$= \frac{0.081}{0.081+0.459s+0.693s^2+1.499s^3+0.706s^4+s^5}$$

第五步：将上式分母因式分解(或由切比雪夫滤波器设计参数表可查得极点位置和二次因式展开式)为

$$H_5(s) = \frac{0.081}{(s+0.21)(s+0.06-\mathrm{j}0.97)(s+0.06+\mathrm{j}0.97)(s+0.17-\mathrm{j}0.06)(s+0.17+\mathrm{j}0.06)}$$

第六步：将上式共轭对写成二次实数形式可得

$$H_5(s) = \frac{0.081}{(s+0.21)(s^2+0.135s+0.95)(s^2+0.35s+0.39)}$$

第七步：为满足题意，通带截止频率 $\Omega_d=40\mathrm{rad/s}$，只要将上式进行 $s\to\frac{s}{40}$ 的去归一化变量代换，即可得到需要设计的滤波器传递函数

$$H_d(s) = \frac{8.37\times 10^6}{(s+8.37)(s^2+5.39s+1520)(s^2+14.1s+627)}$$

6-13 用脉冲响应不变法设计一个低通数字滤波器。已知模拟低通滤波器原型的系统函数为 $H_a(s)=\frac{2}{s^2+3s+2}$，模拟域通带截止频率 f_c 为 1kHz，时域采样频率 f_s 为 4kHz。试求数字低通滤波器的系统函数 $H(z)$，并画出其级联型结构图。若保持 $H(z)$ 不变，时域采样频率 f_s 提高 4 倍，则该低通数字滤波器的截止频率有什么变化？

解：通带截止角频率：

$$\Omega_c = 2\pi f_c = 2\pi\times 1000\mathrm{rad/s} = 2000\pi\ \mathrm{rad/s}$$

用 $\frac{s}{\Omega_c}$ 代替 $H_a(s)$ 中的 s，实现反归一化并部分分式分解，即

$$H(s) = \frac{2}{\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)^2+3\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)+2} = \frac{-2}{\frac{s}{\Omega_c}+2}+\frac{2}{\frac{s}{\Omega_c}+1} = \frac{-2\Omega_c}{s+2\Omega_c}+\frac{2\Omega_c}{s+\Omega_c}$$

可求出模拟低通滤波器的极点：

$$s_{p1}=-2\Omega_c,\quad s_{p2}=-\Omega_c$$

数字滤波器采样时间间隔：

$$T=\frac{1}{f_s}=\frac{1}{4000}\text{s}$$

根据脉冲响应不变法的设计公式，得数字低通滤波器的系统函数：

$$H(z)=T\sum_{i=1}^{2}\frac{A_i}{1-\mathrm{e}^{s_{pi}T}z^{-1}}=\frac{-2\Omega_c T}{1-\mathrm{e}^{-2\Omega_c T}z^{-1}}+\frac{2\Omega_c T}{1-\mathrm{e}^{-\Omega_c T}z^{-1}}$$

$$=\frac{-\pi}{1-\mathrm{e}^{-\pi}z^{-1}}+\frac{\pi}{1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}z^{-1}}=\frac{\pi(\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}-\mathrm{e}^{-\pi})z^{-1}}{(1-\mathrm{e}^{-\pi}z^{-1})(1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}z^{-1})}$$

$$=\frac{0.517z^{-1}}{(1-0.043z^{-1})(1-0.208z^{-1})}$$

级联型结构如图 6-18 或图 6-19 所示。

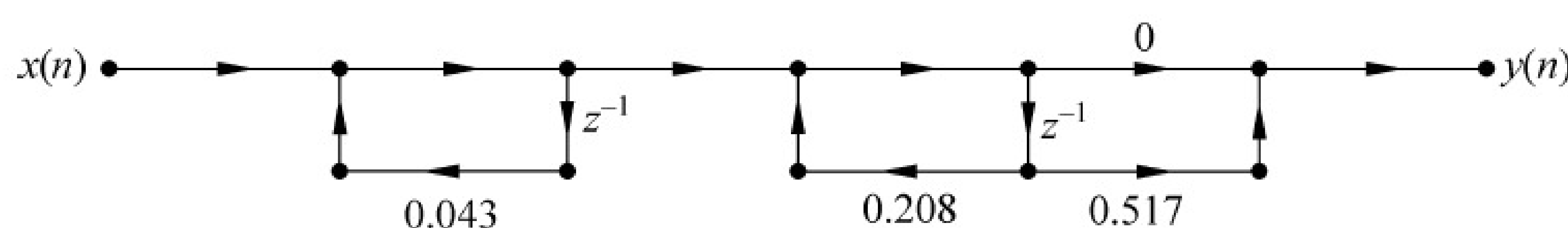


图 6-18　题 6-13 解图一

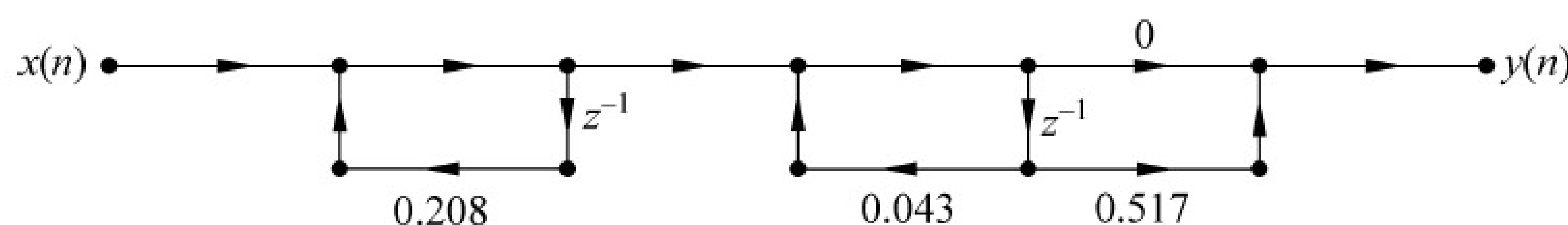


图 6-19　题 6-13 解图二

6-14　设计一个带通数字滤波器，其设计要求为：

(1) 时域采样频率 $f_s=8\text{kHz}$；

(2) 通带为 2.025～2.225kHz，增益最大 1dB 波动；

(3) 阻带为 0～1.5kHz 和 2.7kHz 以上，增益衰减至少为 40dB。

解：首先，根据模拟 LPF 与数字 BPF 的频带变换关系，如图 6-20 所示，模拟变换域 s 平面的原点 $s=0$ 映射到数字变换域 z 平面上的 $z=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{j}\omega_0}$，同时将 $s=\pm\mathrm{j}\infty$ 点映射到 $z=\pm1$，满足这个要求的模拟 LPF 到数字 BPF 的双线性变换为：

$$s=\frac{(z-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0})(z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0})}{(z-1)(z+1)}=\frac{z^2-2z\cos\omega_0+1}{z^2-1}\tag{6.2.3}$$

令 $s=\mathrm{j}\Omega$，$z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}$，代入式(6.2.3)，经推导可得

$$\Omega=\frac{\cos\omega_0-\cos\omega}{\sin\omega}\tag{6.2.4}$$

式(6.2.4)的映射关系在图 6-20 可见，$\Omega=0$ 映射到 ω_0，而 $\Omega=\pm\infty$ 映射到 $\omega=0$ 和 $\omega=\pi$。

因为设计数字 BPF 时，一般给出其通带的上、下边缘频率 ω_u、ω_L 作为设计要求。因此在应用上述双线性变换时，要从 ω_u、ω_L 换算出数字 BPF 通带的中心频率 ω_0 以及模拟 LPF 的通带截止频率 Ω_c。根据式(6.2.4)，有如下关系：

$$\Omega_u=\frac{\cos\omega_0-\cos\omega_u}{\sin\omega_u}$$

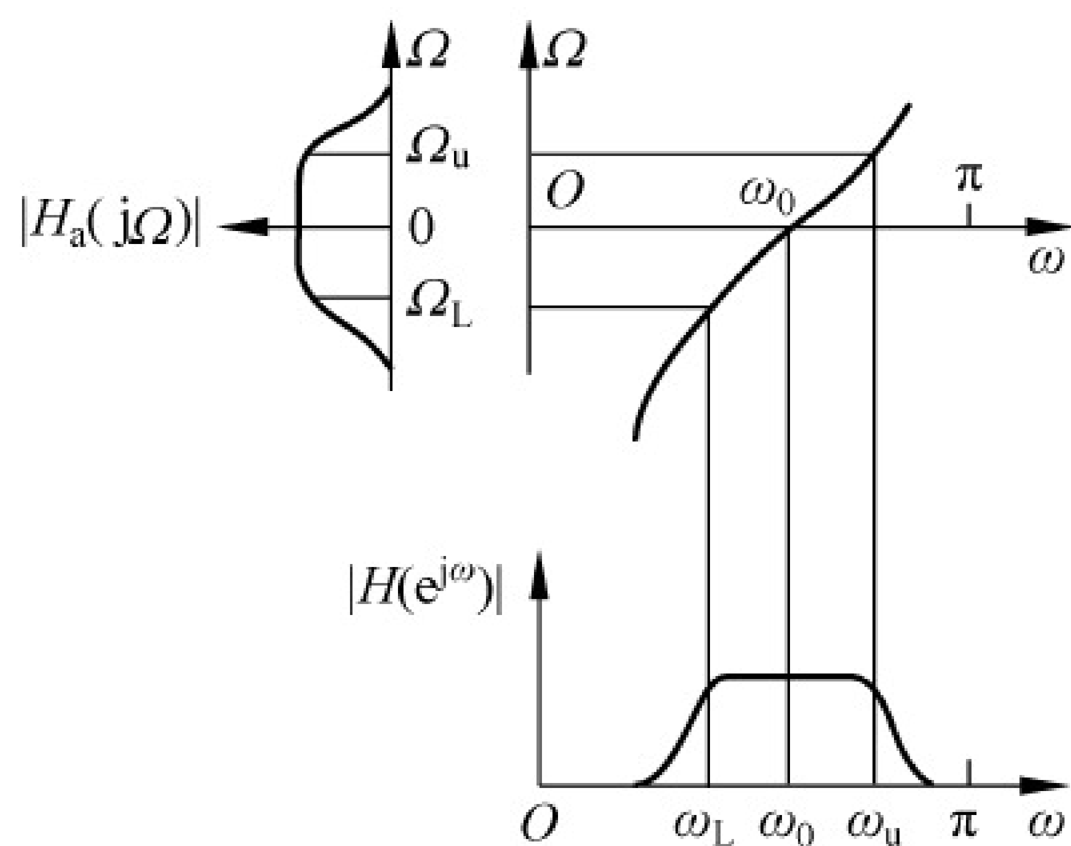


图 6-20 模拟 LPF 与数字 BPF 频带变换

$$\Omega_L = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_L}{\sin\omega_L}$$

考虑到关系 $\Omega_u = -\Omega_L$，代入上两等式，可求出

$$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_u + \omega_L)}{\sin\omega_u + \sin\omega_L} \tag{6.2.5}$$

而由式(6.2.4)可得模拟 LPF 的通带截止频率 Ω_c：

$$\Omega_c = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_u}{\sin\omega_u} \tag{6.2.6}$$

根据式(6.2.6)可以将数字 BPF 设计要求的通带边缘频率映射到模拟 LPF 的通带边缘频率，设计出模拟 LPF 的原型系统函数 $H(s)$，再通过式(6.2.3)的参数变换，得到要求的数字 BPF 系统函数 $H(z)$。

下面求对应的模拟低通滤波器的设计指标。依题意，数字带通滤波器的设计频率指标：

$$\omega_L = \frac{2\pi \times 2025}{8000}\text{rad} = 1.5904\text{rad}$$

$$\omega_u = \frac{2\pi \times 2225}{8000}\text{rad} = 1.7475\text{rad}$$

$$\omega_{s1} = \frac{2\pi \times 1500}{8000}\text{rad} = 1.1781\text{rad}$$

$$\omega_{s2} = \frac{2\pi \times 2700}{8000}\text{rad} = 2.1206\text{rad}$$

因此，数字带通滤波器的设计指标为

通带：1.5904～1.7475rad，1dB 波动。

阻带：0rad～1.1781rad，2.1206rad～3.14159rad，40dB 衰减。

代入式(6.2.5)求出

$$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_u + \omega_L)}{\sin\omega_u + \sin\omega_L} = \frac{\sin(1.7475 + 1.5904)}{\sin 1.7475 + \sin 1.5904} = -0.0983$$

代入式(6.2.6)和式(6.2.4)，分别求出

$$\Omega_c = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_u}{\sin\omega_u} = \frac{-0.098 - \cos 1.7475}{\sin 1.7475} = 0.079\text{rad/s}$$

$$\Omega_s = \frac{\cos\omega_0 - \cos\omega_{s2}}{\sin\omega_{s2}} = \frac{-0.098 - \cos 2.1206}{\sin 2.1206} = 0.4979\text{rad/s}$$

$$-\Omega_s=\frac{\cos\omega_0-\cos\omega_{s1}}{\sin\omega_{s1}}=\frac{-0.098-\cos 1.1781}{\sin 1.1781}=-0.5203\text{rad/s}$$

取 $\Omega_s=0.4979\text{rad/s}$。

方法1：选择设计巴特沃斯型模拟LPF,求其阶次 N。因为

$$k_{sp}=\sqrt{\frac{10^{\alpha_s/10}-1}{10^{\alpha_p/10}-1}}=\sqrt{\frac{10^4-1}{10^{0.1}-1}}=196.5$$

$$\lambda_{sp}=\frac{\Omega_s}{\Omega_c}=\frac{0.4979}{0.079}=6.303$$

可得阶次 N：

$$N=\frac{\lg k_{sp}}{\lg\lambda_{sp}}=\frac{\lg 196.5}{\lg 6.303}=2.87$$

取模拟LPF的阶次 $N=3$。查表得归一化LPF原型系统函数：

$$G(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p+1}$$

求巴特沃斯LPF的3dB带宽频率：

$$\Omega_{3dB}=\Omega_c(10^{0.1\alpha_p}-1)^{-\frac{1}{2N}}=0.079\times(10^{0.1}-1)^{-\frac{1}{6}}\text{rad/s}=0.099\text{rad/s}$$

令 $p=\frac{s}{\Omega_{3dB}}=\frac{s}{0.099}$去归一化,得

$$H_a(s)=\frac{1}{\left(\frac{s}{0.099}\right)^3+2\left(\frac{s}{0.099}\right)^2+2\left(\frac{s}{0.099}\right)+1}$$
$$=\frac{9.703\times10^{-4}}{s^3+0.198s^2+0.0196s+9.703\times10^{-4}}$$

由式(6.2.3)得

$$s=\frac{z^2-2z\cos\omega_0+1}{z^2-1}$$
$$=\frac{z^2-2z\times(-0.0983)+1}{z^2-1}=\frac{z^2+0.1966z+1}{z^2-1}$$

代入 $H_a(s)$,整理得数字BPF的系统函数

$$H(z)=\left.\frac{9.703\times10^{-4}}{s^3+0.198s^2+0.0196s+9.703\times10^{-4}}\right|_{s=\frac{z^2+0.1966z+1}{z^2-1}}$$
$$=\frac{9.703\times10^{-4}z^6(1-z^{-2})^3}{1.219z^6+0.6715z^5+3.299z^4+1.179z^3+2.8936z^2+0.5158z+0.8206}$$
$$=\frac{7.96\times10^{-4}(1-3z^{-2}+3z^{-4}-z^{-6})}{1+0.5509z^{-1}+2.706z^{-2}+0.9672z^{-3}+2.3737z^{-4}+0.4231z^{-5}+0.6732z^{-6}}$$

方法1：设计的巴特沃斯型IIR BPF幅频特性如图6-21所示。

方法2：本题如果设计模拟LPF的原型选切比雪夫Ⅰ型,则设计结果会有不同。切比雪夫型Ⅰ型低通原型滤波器设计步骤具体如下。

求通带波纹参数 ε：

$$\varepsilon=\sqrt{10^{0.1\alpha_p}-1}=\sqrt{10^{0.1\times1}-1}=0.509$$

求阶次 N：

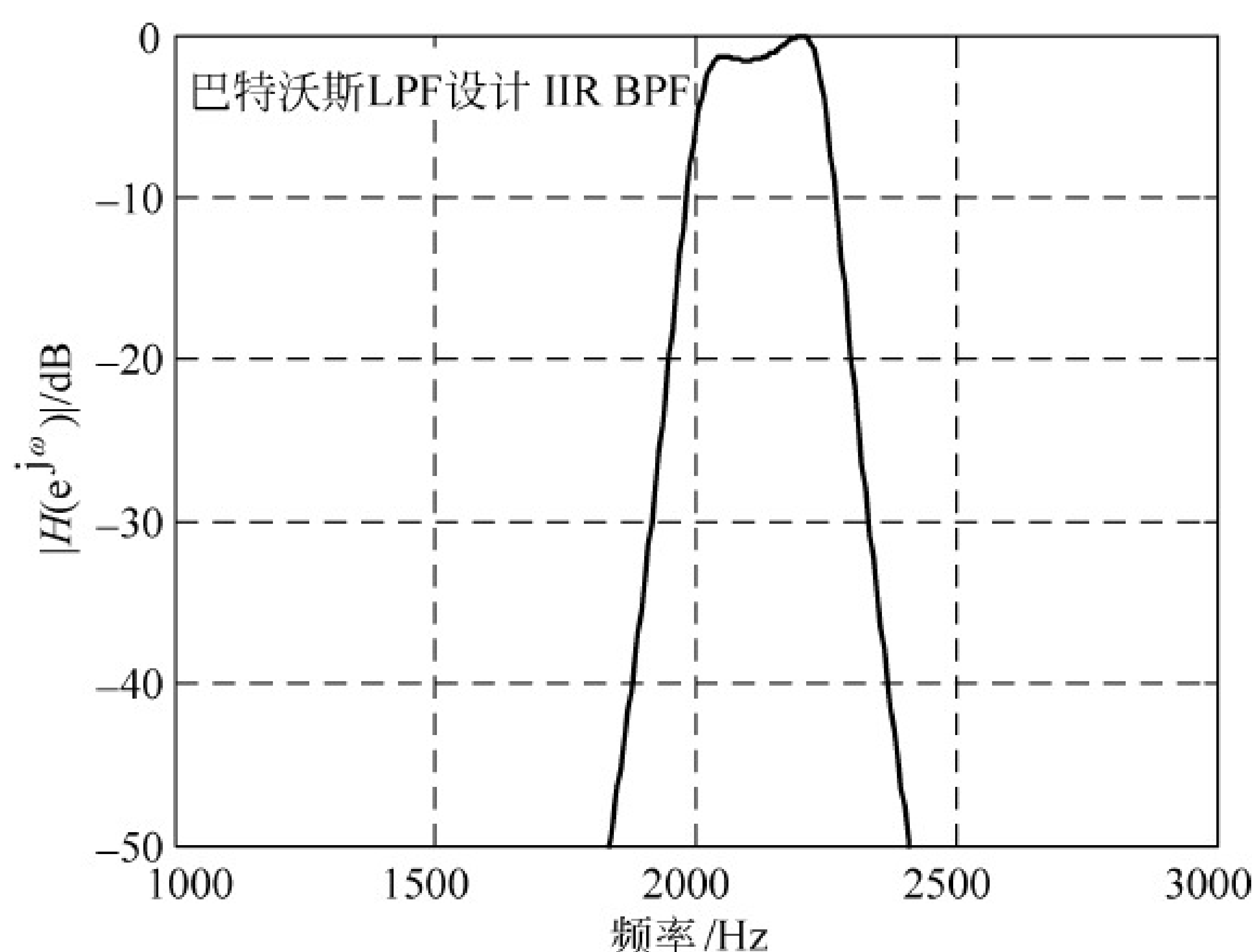


图 6-21　题 6-14 解图一，由巴特沃斯 LPF 原型设计的 IIR BPF 幅频特性（特定的模拟 LPF 到数字 BPF 的双线性变换法）

$$N=\frac{\operatorname{arch}(k_{sp})}{\operatorname{arch}(\lambda_{sp})}=\frac{\operatorname{arch}(196.5)}{\operatorname{arch}(6.303)}=2.36$$

取 $N=3$。

由于题目给定的 Ω_c 是 1dB 带宽的边缘频率，故切比雪夫Ⅰ型 LPF 的 3dB 带宽边缘频率为：

$$\Omega_{3dB}=\Omega_c\operatorname{ch}\left[\frac{1}{N}\operatorname{arch}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]=0.079\operatorname{ch}\left[\frac{1}{3}\operatorname{arch}\left(\frac{1}{0.5088}\right)\right]\text{rad/s}=0.0865\text{rad/s}$$

令 $\xi=\dfrac{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}{N}=\dfrac{\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{0.5088}\right)}{3}=0.476$，求归一化切比雪夫滤波器系统函数的 3 个极点：

$$\begin{aligned}p_k&=-\operatorname{sh}\xi\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right]+\mathrm{j}\operatorname{ch}\xi\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right]\\&=-\operatorname{sh}(0.476)\sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{6}\right]+\mathrm{j}\operatorname{ch}(0.476)\cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{6}\right],\quad k=1,2,3\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}p_1&=-0.247+\mathrm{j}0.966\\p_2&=-0.494\\p_3&=-0.247-\mathrm{j}0.966\end{aligned}$$

代入切比雪夫归一化 LPF 模型中：

$$\begin{aligned}H_a(p)&=\frac{1}{\varepsilon\cdot 2^{N-1}\prod_{k=1}^{N}(p-p_k)}=\frac{1}{0.5088\cdot 2^{3-1}\prod_{k=1}^{3}(p-p_k)}\\&=\frac{0.491}{(p+0.494)(p^2+0.494p+0.994)}\\&=\frac{0.491}{p^3+0.9883p^2+1.2384p+0.4913}\end{aligned}$$

令 $p=\frac{s}{\Omega_{3\text{dB}}}$，代入上式去归一化，并用模拟 LPF 到数字 BPF 的修正双线性变换式数字化。将 $p=\frac{1}{\Omega_{3\text{dB}}}\frac{1+0.197z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$代入并整理，得切比雪夫数字Ⅰ型 BPF 系统函数：

$$H(z)=\frac{6.472\times10^{-4}\ (1-z^{-2})^{3}}{1.0946+0.6265z^{-1}+3.195z^{-2}+1.186z^{-3}+3.0193z^{-4}+0.5574z^{-5}+0.9235z^{-6}}$$

$$=\frac{5.913\times10^{-4}(1-3z^{-2}+3z^{-4}-z^{-6})}{1+0.5724z^{-1}+2.9189z^{-2}+1.0835z^{-3}+2.7584z^{-4}+0.5092z^{-5}+0.8537z^{-6}}$$

方法 2 设计的切比雪夫Ⅰ型 IIR BPF 的幅频特性如图 6-22 所示。

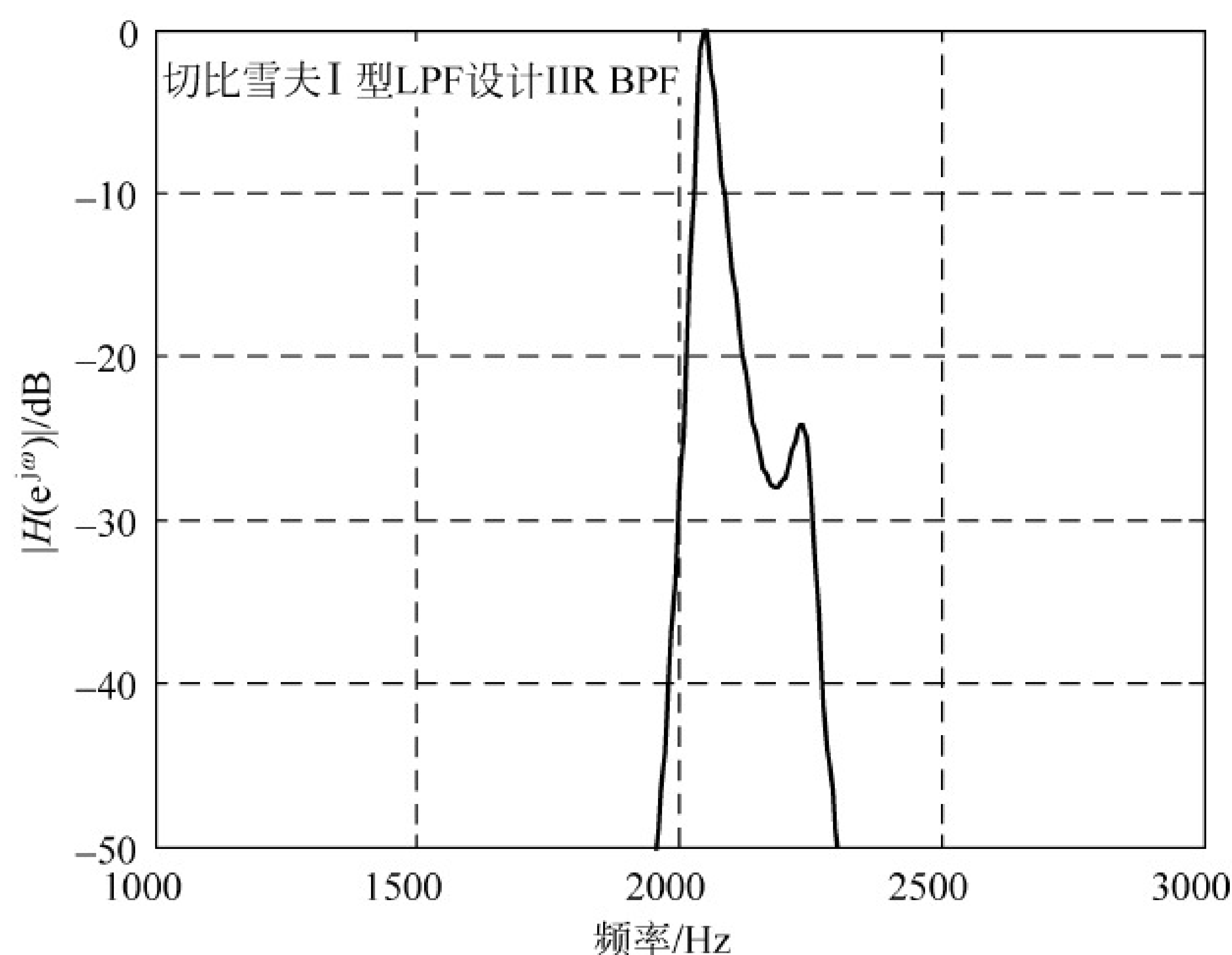


图 6-22　题 6-14 解图二，切比雪夫Ⅰ型 LPF 原型设计的 IIR BPF 幅频特性
（特定的模拟 LPF 到数字 BPF 的双线性变换法）

方法 3：本题也可通过模拟域频带变换和数字化两步设计的方案：①数字 BPF 到模拟 BPF 的频率指标变换（双线性变换取 $T=2$）；②模拟 BPF 到模拟 LPF 的频率指标变换，设计模拟切比雪夫Ⅰ型归一化 LPF；③经 LPF 到 BPF 的模拟系统函数变换（调用 MATLAB 的库函数 lp2bp(.)）；④最后经双线性变换把模拟 BPF 系统函数转换成数字 BPF 的系统函数。

所设计的模拟切比雪夫Ⅰ型归一化 LPF 原型的阶次 $N=3$，模拟域频带变换法设计出切比雪夫Ⅰ型 BPF，最终用常规双线性变换得到切比雪夫Ⅰ型数字 BPF 的系统函数：

$$H(z)=\frac{2.206\times10^{-4}(1-3z^{-2}+3z^{-4}-z^{-6})}{1+0.5729z^{-1}+2.937z^{-2}+1.091z^{-3}+2.789z^{-4}+0.5166z^{-5}+0.8563z^{-6}}$$

方法 3 设计的切比雪夫Ⅰ型 IIR BPF 的幅频特性如图 6-23 所示。

比较方法 1～方法 3 设计的 IIR BPF 结果可知：给定同样的数字滤波器设计指标，用不同的设计方法，得到的滤波器系统函数是不同的，但所设计的数字滤波器的幅频特性均符合给定的滤波器设计指标。

6-15　用 MATLAB 编程设计一个模拟巴特沃斯带通滤波器，设计指标：通带频率范围 1000～2000Hz，滤波器通带两侧过渡带宽 500Hz，通带增益衰减最大 1dB，阻带增益衰减大于 100dB。

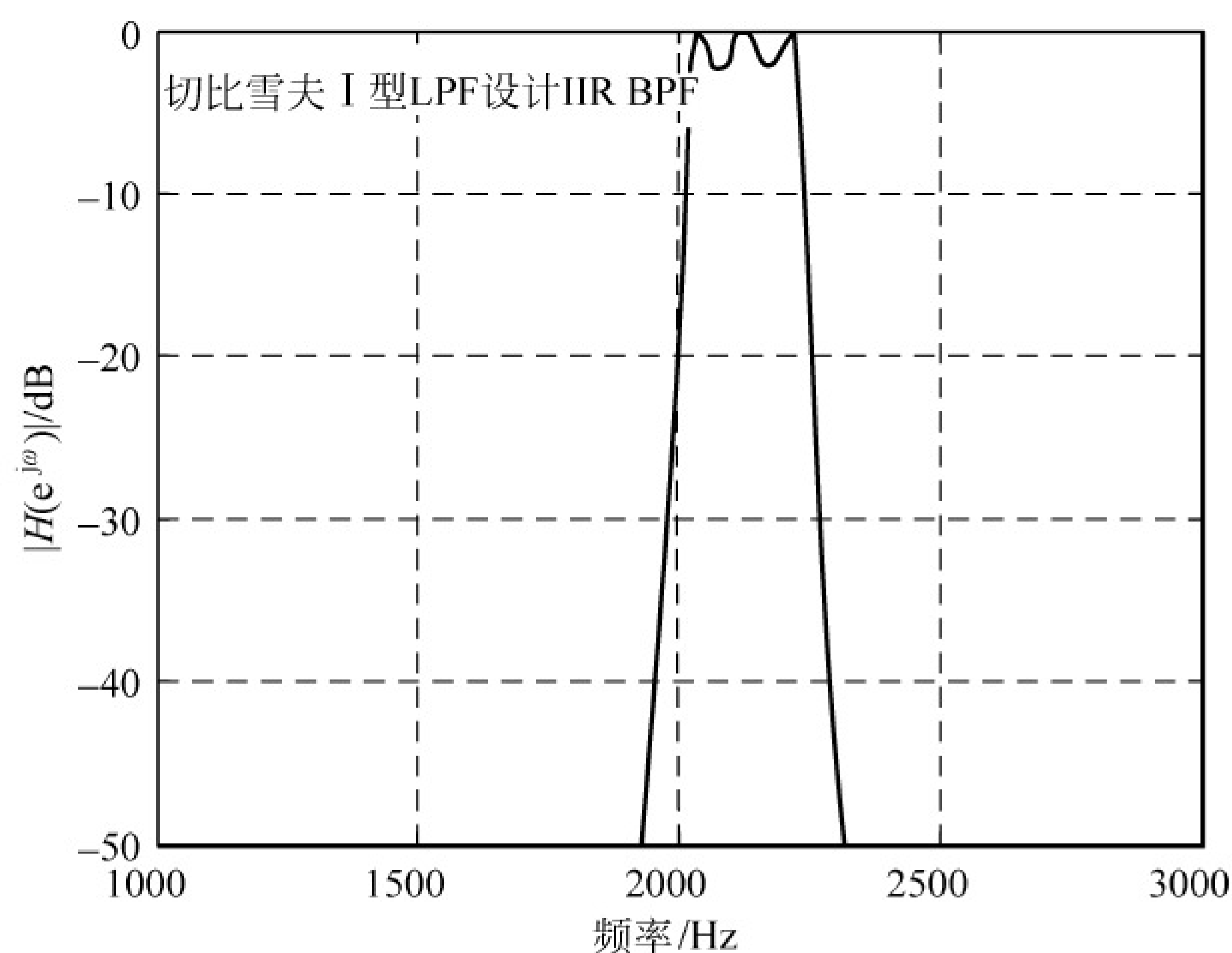


图 6-23 题 6-14 解图三，切比雪夫Ⅰ型 LPF 原型设计的 IIR BPF 幅频特性
（模拟域频带变换法结合 BPF 的双线性变换）

解：

(1) 确定指标

通带边界频率：

$$\omega_{\mathrm{p}}=[2\pi f_{\mathrm{lp}}\quad 2\pi f_{\mathrm{hp}}]\mathrm{rad/s}$$

阻带边界频率：

$$\omega_{\mathrm{s}}=[2\pi f_{\mathrm{lp}}-500\quad 2\pi f_{\mathrm{hp}}+500]\mathrm{rad/s}$$

通带纹波系数：

$$R_{\mathrm{p}}=1\mathrm{dB}$$

阻带最小衰减：

$$R_{\mathrm{s}}=100\mathrm{dB}$$

(2) 使用最小阶数选择函数 Buttord(ω_{p},ω_{s},R_{p},R_{s},'s')，求最小阶数 N 和截止频率 ω_{c}。

(3) 使用 Butter(N,ω_{c},'s')函数直接求 $H(s)$的分子和分母系数向量[b,a]。

(4) MATLAB 程序如下：

```
wp = 2 * pi * [1000 2000];
ws = 2 * pi * [500 2500];
Rp = 1;
Rs = 100;

[N,wc] = buttord(wp,ws,Rp,Rs,'s');
Fc = wc/(2 * pi);
[b,a] = butter(N,wc,'s');
w = 2 * pi * linspace(1,3000,1000);
H = freqs(b,a,w);
plot(w/(2 * pi),20 * log10(abs(H)),'k');grid
xlabel('频率 (Hz)');
ylabel('幅度 (dB)');
title('巴特沃斯带通滤波器')
```

（5）运行结果如图 6-24 所示。

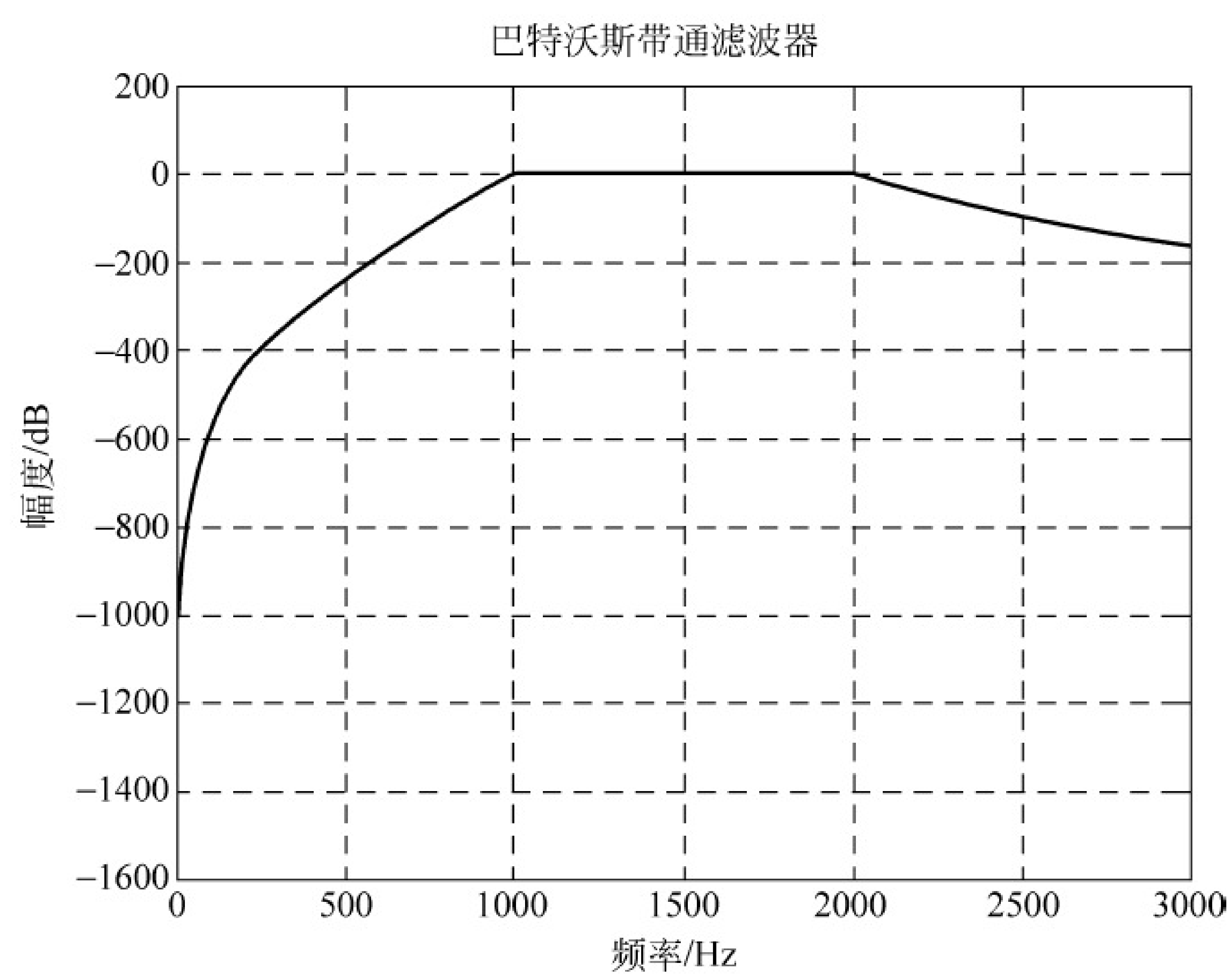


图 6-24　题 6-15 解图

第7章 FIR 数字滤波器设计

CHAPTER 7

7.1 重点内容

7.1.1 FIR 滤波器的线性相位条件和特点

1. 第一、第二类线性相位

设 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$长为 N，传输函数为

$$H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n} \equiv H_{\mathrm{g}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta(\omega)} \tag{7.1.1}$$

滤波器的幅度特性 $H_{\mathrm{g}}(\omega)$、相位特性 $\theta(\omega)$均为实函数。滤波器传输函数 $H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$具有线性相位是指 $\theta(\omega)$是数字频率 ω 的线性函数。其中，第一类线性相位函数：

$$\theta(\omega) = -\tau\omega \tag{7.1.2}$$

第二类线性相位函数：

$$\theta(\omega) = \theta_0 - \tau\omega \tag{7.1.3}$$

式中，τ 为常数，$-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$，$\theta_0$ 是起始相位。

2. FIR 滤波器线性相位条件

长为 N 的单位采样脉冲响应 $h(n)$应满足下列两个充要条件之一：

(1) 第一类线性相位的条件，$h(n)$是实序列且对$\frac{N-1}{2}$偶对称：

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{7.1.4}$$

(2) 第二类线性相位的条件，$h(n)$是实序列且对$\frac{N-1}{2}$奇对称：

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1 \tag{7.1.5}$$

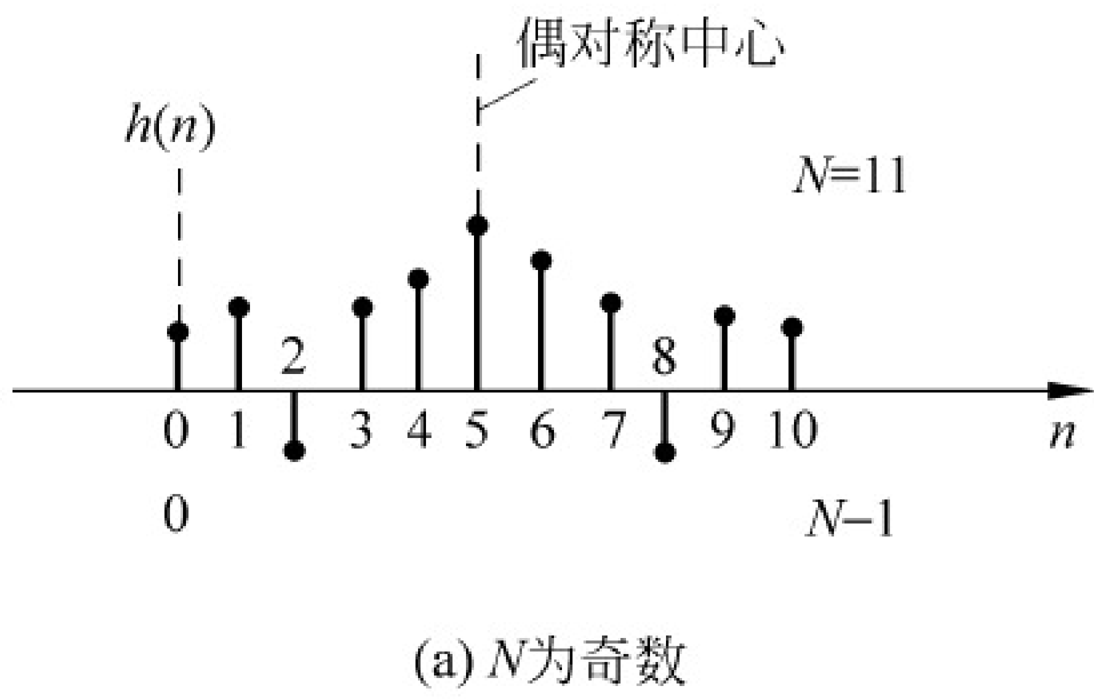
再考虑 $h(n)$的长度 N 分为偶数和奇数两种情况，$h(n)$有四种类型，分别对应四种线性相位 FIR 数字滤波器，如图 7-1 和图 7-2 所示。

3. 线性相位 FIR 滤波器的幅度特性

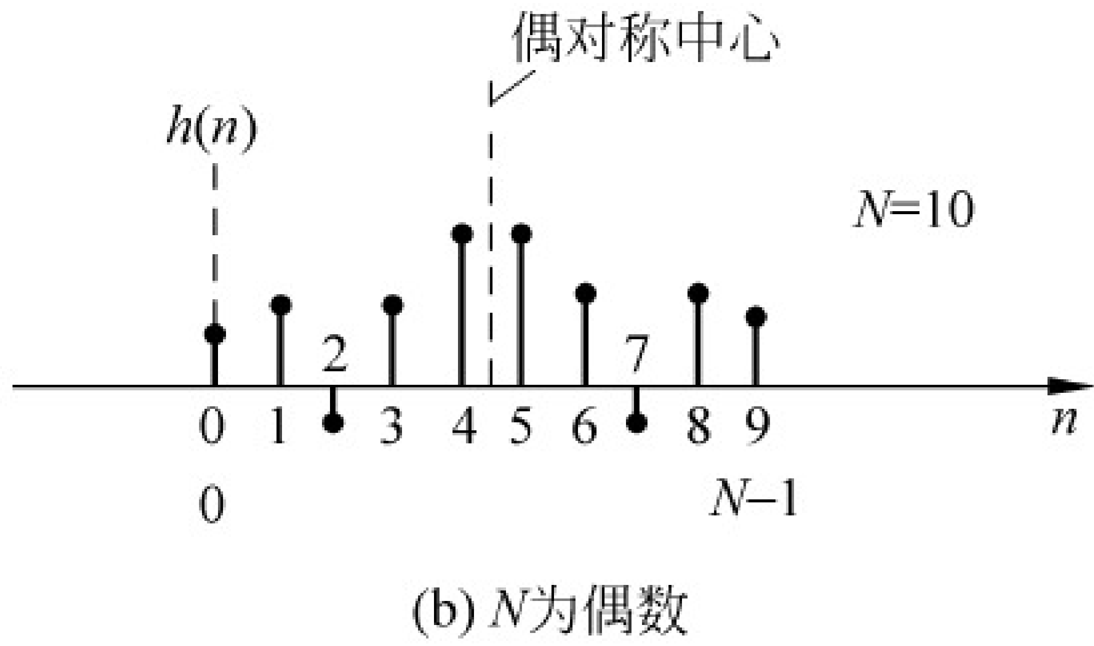
具有第一类线性相位特点的滤波器，幅度函数和相位函数分别为：

$$H_{\mathrm{g}}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cos\left[\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\omega\right] \tag{7.1.6a}$$

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega \tag{7.1.6b}$$

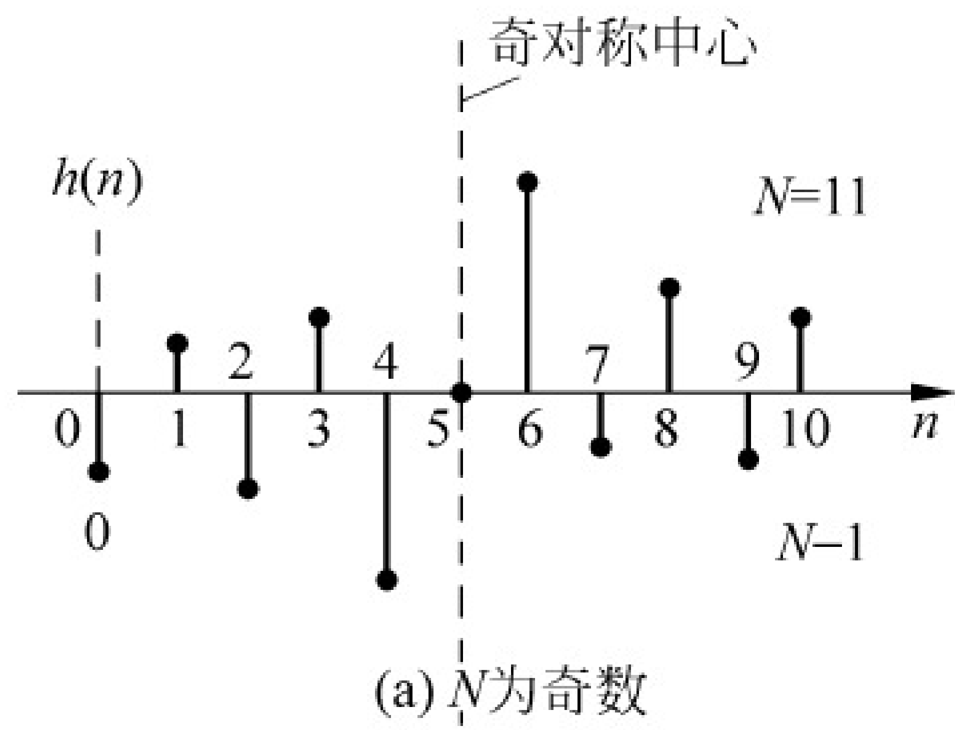


(a) N为奇数

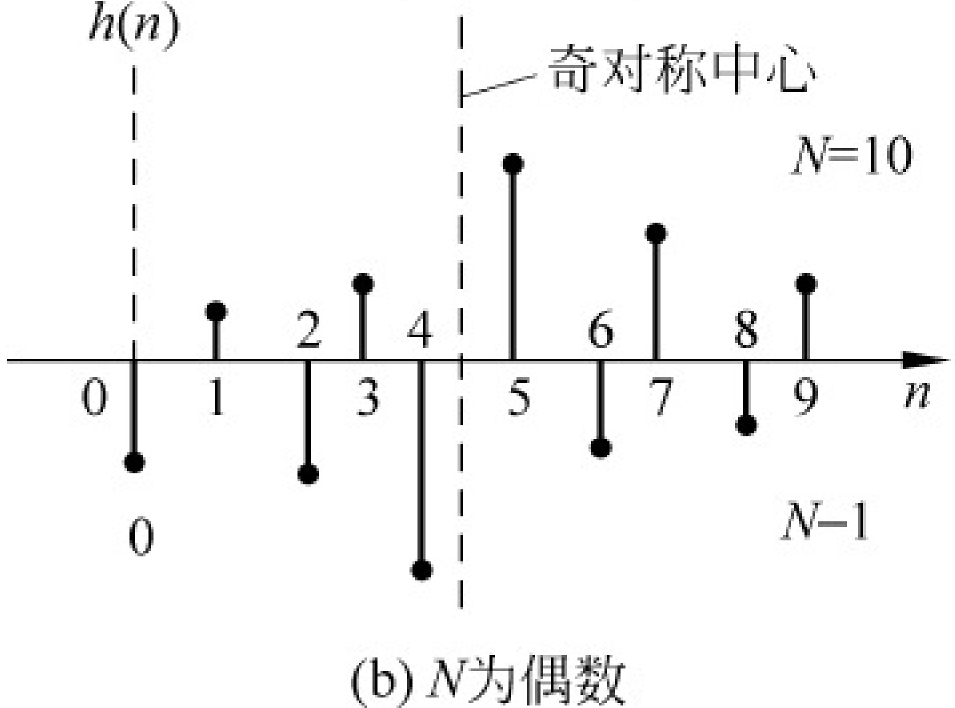


(b) N为偶数

图 7-1　$h(n)$偶对称



(a) N为奇数



(b) N为偶数

图 7-2　$h(n)$奇对称

具有第二类线性相位特点的滤波器，幅度函数和相位函数分别为：

$$H_g(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)\sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] \tag{7.1.7a}$$

$$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega+\frac{\pi}{2} \tag{7.1.7b}$$

显然幅度特性 $H_g(\omega)$为以 N 点单位采样脉冲响应 $h(n)$为权重的，频率为 ω 的简谐信号 N 点样值的线性组合。长度 N 的奇偶性和 $h(n)$的对称性，决定 $H_g(\omega)$的奇偶对称性，具体情况如表 7-1 所示。

第一类线性相位 FIR 滤波器常用来实现选频性滤波器，当 N 为偶数时，幅度特性在高频段（π 附近）增益很小（理论上 $H_g(\pi)=0$），不适合实现高通和带阻滤波器；第二类线性相位 FIR 滤波器具有$\frac{\pi}{2}$的恒定相移，常用于实现微分器（differentiator）和 90°相移器（Hilbert transformer）。

表 7-1　线性相位 FIR 滤波器的幅度特性与相位特性

	偶对称 $h(n)=h(N-1-n)$	奇对称 $h(n)=-h(N-1-n)$
相位函数	$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$ $\theta(\omega)$ O ω	$\theta(\omega)=\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega$ $\theta(\omega)$ O ω

续表

	偶对称 $h(n)=h(N-1-n)$	奇对称 $h(n)=-h(N-1-n)$
N 为奇数	幅度函数 $H(\omega)=\sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}}a(n)\cos(n\omega)$ $a(n)=h\left(\frac{N-1}{2}\right), n=0$ $a(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right), n\neq 0$	幅度函数 $H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}}c(n)\sin(n\omega)$ $c(n)=2h\left(\frac{N-1}{2}-n\right), n=1,2,\cdots,\frac{N-1}{2}$
N 为偶数	幅度函数 $H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}b(n)\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$ $b(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right), n=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$	幅度函数 $H(\omega)=\sum_{n=1}^{\frac{N}{2}}d(n)\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega\right]$ $d(n)=2h\left(\frac{N}{2}-n\right), n=1,2,\cdots,\frac{N}{2}$

4. 线性相位 FIR 滤波器的零点分布特点

线性相位 FIR 滤波器的系统函数满足

$$H(z)=\pm z^{-(N-1)}H(z^{-1}) \tag{7.1.8}$$

当 $z=z_i$ 是 $H(z)$的零点，z_i^{-1} 必是 $H(z)$的零点；当滤波器单位采样脉冲响应 $h(n)$是因果实序列，其 z 变换得到的系统函数 $H(z)$的零点必为实数，或共轭对称的复数对，故，z_i^*、$(z_i^{-1})^*$ 也是 $H(z)$的零点。如图 7-3 所示，零点分布有以下四种可能：

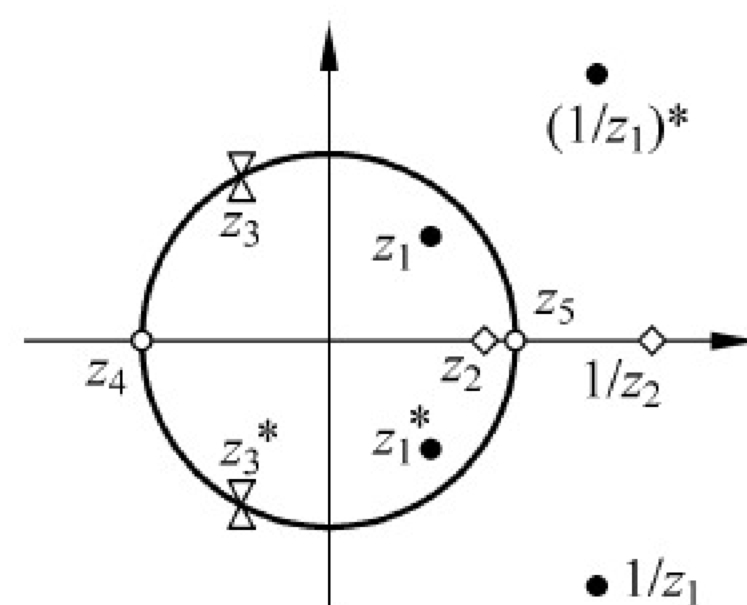


图 7-3　线性相位 FIR 滤波器零点分布

(1) 复数零点，互为倒数的两组共轭对，如图 7-3 中 z_1、z_1^{-1}，z_1^* 和$(z_1^{-1})^*$。

(2) 实零点，不在 z 平面单位圆上，只有倒数对，如图 7-3 中 z_2 和 z_2^{-1}。

(3) 实零点，且在 z 平面单位圆上，则只有一个，如图 7-3 中 z_4、z_5。

(4) 复数零点，且在 z 平面单位圆上，只有共轭对，如图 7-3 中 z_3、z_3^*。

7.1.2　窗函数法设计 FIR 滤波器

1. 窗函数技术

1) 窗函数法设计 FIR 滤波器的步骤

(1) 给定要求的频响函数 $H_d(e^{j\omega})$。

(2) 用傅里叶反变换(IDTFT)计算给定频响的理想单位采样脉冲响应：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega,\quad -\infty<n<\infty \tag{7.1.9}$$

或直接对 $H_d(e^{j\omega})$ 采样 M 点，近似计算 $h_d(n)\approx h_M(n)$：

$$h_M(n)=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}H_d(e^{j\frac{2\pi}{M}k})e^{j\frac{2\pi}{M}kn} \tag{7.1.10}$$

（3）根据滤波器的过渡带宽及阻带增益最小衰减要求，选合适的窗函数 $w(n)$ 及列长 N，N 也是最终设计的 FIR 滤波器有限长脉冲响应 $h(n)$ 的长度，可试验确定。

（4）用选定的合适窗函数 $w(n)$，$n=0,1,2,\cdots,N-1$，修正计算出的理想单位采样脉冲响应 $h_d(n)$，得到设计的 FIR 滤波器单位采样脉冲响应：

$$h(n)=w(n)h_d(n),\quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.11}$$

（5）由 $h(n)$ 计算设计的 FIR 滤波器的频响（可用 FFT）：

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n} \tag{7.1.12}$$

将 $H(e^{j\omega})$ 与要求的滤波器频响函数 $H_d(e^{j\omega})$ 比较，直到误差满足要求。

2）窗函数法设计 FIR 滤波器的思想

用有限长的滤波器单位采样脉冲响应 $h(n)$ 系统的频响近似表示无限长的单位采样脉冲响应 $h_d(n)$ 系统的频响。

3）FIR 滤波器可实现的典型理想滤波器系统

设典型理想滤波器为线性相位，频响 $H_d(e^{j\omega})=D(\omega)e^{-j\alpha\omega}$，$\alpha$ 为（延迟）常数。

（1）幅度频率特性 $D(\omega)$。

① 幅频特性分段常数的选频滤波器。理想 LPF、HPF、BPF 和 BSF 的幅频特性 $D(\omega)$ 可用分段常数表示，如图 7-4 所示。

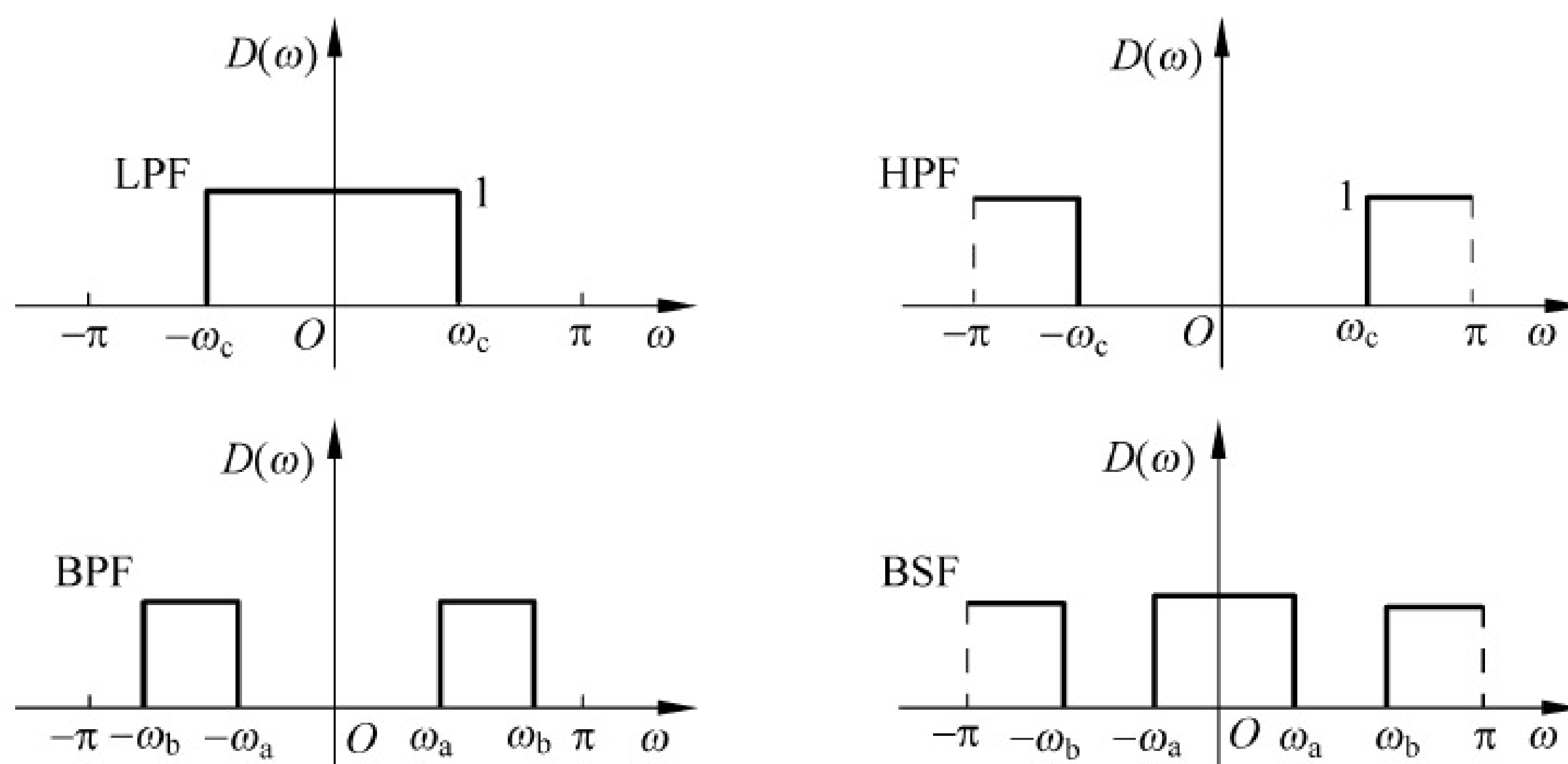


图 7-4　理想滤波器（LPF、HPF、BPF 和 BSF）的幅频特性

② 理想微分器。理想微分滤波器的幅频特性 $D(\omega)$ 如图 7-5 所示，则

$$H_d(e^{j\omega})=j\omega e^{-j\alpha\omega}=\omega e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\omega\right)} \tag{7.1.13}$$

③ 希尔伯特变换滤波器。希尔伯特变换滤波器的幅频特性 $D(\omega)$ 如图 7-6 所示，则

$$H_d(e^{j\omega})=-j\mathrm{sign}(\omega)e^{-j\alpha\omega}=-\mathrm{sign}(\omega)e^{j\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\omega\right)} \tag{7.1.14}$$

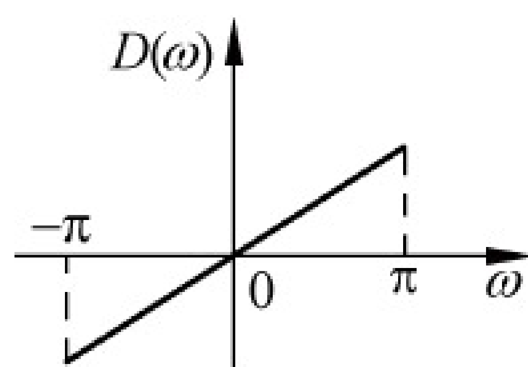


图 7-5　理想微分滤波器的幅频特性

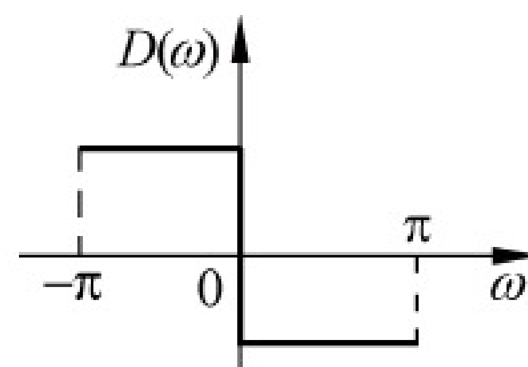


图 7-6　希尔伯特变换滤波器的幅频特性

(2) 典型理想滤波器的单位采样脉冲响应 $h_d(n)$。

① 幅频特性为分段常数的选频滤波器的理想单位采样脉冲响应 $h_d(n)$。

图 7-4 所示的理想滤波器(LPF、HPF、BPF 和 BSF)的单位采样脉冲响应如式(7.1.15)~式(7.1.18)所示。

$$\text{LPF: } h_d(n)=\frac{\sin\omega_c(n-a)}{\pi(n-a)} \tag{7.1.15}$$

$$\text{HPF: } h_d(n)=\delta(n-a)-\frac{\sin\omega_c(n-a)}{\pi(n-a)} \tag{7.1.16}$$

式(7.1.15)和式(7.1.16)中 ω_c 为截止频率,且对 LPF,$h_d(a)=\frac{\omega_c}{\pi}$。

$$\text{BPF: } h_d(n)=\frac{\sin\omega_b(n-a)-\sin\omega_a(n-a)}{\pi(n-a)} \tag{7.1.17}$$

$$\text{BSF: } h_d(n)=\delta(n-a)-\frac{\sin\omega_b(n-a)-\sin\omega_a(n-a)}{\pi(n-a)} \tag{7.1.18}$$

式(7.1.17)和式(7.1.18)中 ω_a、ω_b 分别为 BPF、BSF 的下、上截止频率。

特别提示: 当理想 LPF 和理想 HPF 的截止频率相等、理想 BPF 和理想 BSF 的截止频率相等时,LPF 与 HPF、BPF 与 BSF 分别为"互补滤波器"。

互补滤波器的单位采样脉冲响应有关系式如式(7.1.19)和式(7.1.20)所示。

$$h_d(n)_{\text{LPF}}+h_d(n)_{\text{HPF}}=\delta(n) \tag{7.1.19}$$

$$h_d(n)_{\text{BPF}}+h_d(n)_{\text{BSF}}=\delta(n) \tag{7.1.20}$$

互补滤波器的幅度特性函数有关系式如式(7.1.21)和式(7.1.22)所示。

$$D_{\text{LP}}(\omega)+D_{\text{HP}}(\omega)=1 \tag{7.1.21}$$

$$D_{\text{BP}}(\omega)+D_{\text{BS}}(\omega)=1 \tag{7.1.22}$$

② 理想微分滤波器的理想单位采样脉冲响应:

$$h_d(n)=\frac{\cos\pi(n-a)}{(n-a)}-\frac{\sin\pi(n-a)}{\pi(n-a)^2} \tag{7.1.23}$$

③ 希尔伯特变换器的理想单位采样脉冲响应:

$$h_d(n)=\frac{1-\cos\pi(n-a)}{\pi(n-a)},\quad -\infty<n<\infty \tag{7.1.24}$$

特别提示: 理想单位采样脉冲响应 $h_d(n)$ 中,只有延迟 $a=\frac{N-1}{2}$,才能保证无限长的理想滤波器单位采样脉冲响应被长为 N 的因果窗函数 $w(n)$ 截取后,$h(n)=h_d(n)w(n)$ 关于$(N-1)/2$ 对称,实现线性相位 FIR 滤波器。

4) 各种典型窗函数

(1) 矩形窗(rectangular window)的时域模型 $w_R(n)$、频谱函数 $W_R(e^{j\omega})$ 分别如式(7.1.25a)和式(7.1.25b)所示。

$$w_R(n)=R_N(n) \tag{7.1.25a}$$

$$W_R(e^{j\omega})=\frac{\sin\frac{N\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}\equiv W_R(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \tag{7.1.25b}$$

矩形窗谱幅度谱的主瓣宽度为 $B_0=\frac{4\pi}{N}$rad，且第一旁瓣增益比主瓣增益低 13dB。

（2）三角窗(bartlett window)的时域模型 $w_{Br}(n)$、频谱函数 $W_{Br}(e^{j\omega})$分别如式(7.1.26a)和式(7.1.26b)所示。

$$w_{Br}(n)=\begin{cases}\frac{2n}{N-1}, & 0\leqslant n\leqslant\frac{N-1}{2}\\ 2-\frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2}<n\leqslant N-1\end{cases}\tag{7.1.26a}$$

$$W_{Br}(e^{j\omega})=\frac{2}{N}\left(\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2 e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\tag{7.1.26b}$$

三角形窗谱的幅度谱主瓣宽 $B_0=\frac{8\pi}{N}$rad，且第一旁瓣增益比主瓣增益低 26dB。

（3）汉宁(Hanning)窗——升余弦窗的时域模型 $w_{Hn}(n)$、频谱函数 $W_{Hn}(e^{j\omega})$分别如式(7.1.27a)和式(7.1.27b)所示。

$$W_{Hn}(n)=\sin^2\left(\frac{\pi n}{N-1}\right)R_N(n)=0.5\left\{1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right\}R_N(n)\tag{7.1.27a}$$

$$\begin{aligned}W_{Hn}(e^{j\omega})&=\left\{0.5W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)\right]\right\}e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\\&=W_{Hn}(\omega)e^{-j\omega\frac{N-1}{2}}\end{aligned}\tag{7.1.27b}$$

当 $N\gg1$ 时，$N-1\approx N$，汉宁窗谱的幅度函数可近似用式(7.1.28)表示：

$$W_{Hn}(\omega)\approx0.5W_R(\omega)+0.25\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]\tag{7.1.28}$$

汉宁窗谱的幅度函数 $W_{Hn}(\omega)$由三部分相加，使能量更集中在主瓣中，主瓣宽 $B_0\approx\frac{4\pi}{N}+2\times\frac{2\pi}{N}=\frac{8\pi}{N}$，且第一旁瓣增益比主瓣增益低 31dB。

（4）海明(Hamming)窗——改进的升余弦窗时域模型 $w_{Hm}(n)$、频谱函数 $W_{Hm}(e^{j\omega})$分别如式(7.1.29a)和式(7.1.29b)所示。

$$w_{Hm}(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)\tag{7.1.29a}$$

$$W_{Hm}(e^{j\omega})=0.54W_R(e^{j\omega})-0.23[W_R(e^{j\left(\omega-\frac{2\pi}{N-1}\right)})+W_R(e^{j\left(\omega+\frac{2\pi}{N-1}\right)})]\tag{7.1.29b}$$

当 $N\gg1$ 时，窗谱幅度函数 $W_{Hm}(\omega)$可近似表示为：

$$W_{Hm}(\omega)\approx0.54W_R(\omega)+0.23\left[W_R\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_R\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]\tag{7.1.30}$$

海明窗谱幅度谱主瓣宽 $B_0=\frac{4\pi}{N}+2\times\frac{2\pi}{N}=\frac{8\pi}{N}$，且第一旁瓣增益比主瓣增益低 41dB。

（5）布莱克曼(Blackman)窗的时域模型 $w_{BL}(n)$、窗谱函数的幅度谱 $W_{BL}(\omega)$分别如式(7.1.31a)和式(7.1.31b)所示。

$$w_{BL}(n)=\left[0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)\tag{7.1.31a}$$

当 $N\gg1$ 时，窗谱幅度函数 $W_{BL}(\omega)$可近似表示为：

$$W_{\mathrm{BL}}(\omega)=0.42W_{\mathrm{R}}(\omega)+0.25\left[W_{\mathrm{R}}\left(\omega-\frac{2\pi}{N}\right)+W_{\mathrm{R}}\left(\omega+\frac{2\pi}{N}\right)\right]+$$
$$0.04\left[W_{\mathrm{R}}\left(\omega-\frac{4\pi}{N}\right)+W_{\mathrm{R}}\left(\omega+\frac{4\pi}{N}\right)\right] \tag{7.1.31b}$$

布莱克曼窗谱的幅度谱主瓣宽 $B_0=\frac{4\pi}{N}+2\times\frac{4\pi}{N}=\frac{12\pi}{N}$，且第一旁瓣增益比主瓣增益低 57dB。

(6) 凯塞(Kaiser)窗的时域模型 $w_k(n)$如式(7.1.32)所示。

$$w_k(n)=\frac{I_0(\beta)}{I_0(\alpha)},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{7.1.32}$$

其中，

$$\beta=\alpha\left[1-\left(\frac{2n}{N-1}-1\right)^2\right]^{1/2}$$

$I_0(x)$是零阶第一类修正贝塞尔函数；参数 α 可控制凯塞窗的形状，α 越大，则主瓣宽度越大，旁瓣增益 R 越小，通常选择 $4<\alpha<9$。

窗函数的主瓣宽度可用等效带宽因子 c 度量。若以矩形窗谱幅度谱主瓣宽为基准，即令矩形窗的 $c=1$，则海明窗的 $c=2$，布莱克曼窗的 $c=3$，凯塞窗可由其旁瓣增益 R(单位为 dB)，通过式(7.1.33)求出：

$$c=6\times(R+12)/155 \tag{7.1.33}$$

5）窗函数法设计 FIR 滤波器总结

(1) 理想滤波器系统的幅度频率响应 $D(\omega)$很复杂时，闭式积分可能得不到。这时可对 $D(\omega)$在频域采样 M 点($M\gg N$)得 $D(\omega_k)$，$k=0,1,2,\cdots,M-1$，求 $D(\omega_k)$的 M 点 IFFT 得近似 $h_{\mathrm{d}}(n)$，取 $h_{\mathrm{d}}(n)$的前 N 点，即 $0\leqslant n\leqslant N-1$，作为理想滤波器系统的单位采样脉冲响应。

(2) 预先设定窗函数的形式和窗的列长 N，使单位采样脉冲响应为 $h(n)=w(n)h_{\mathrm{d}}(n)$的系统满足预定的滤波器频响；可用试探法(借助计算机)。

(3) 矩形窗和海明窗设计 FIR 滤波器简单，但对滤波器指标的控制不灵活。凯塞窗设计 FIR 滤波器可灵活地实现各种滤波器指标要求，代价是凯塞窗函数比较复杂。不同类型窗设计滤波器的不同指标如表 7-2 所示。

表 7-2 不同类型窗设计滤波器的不同指标

窗函数	窗谱性能指标		加窗后 FIR 滤波器的性能指标			
	旁瓣峰值/dB	主瓣宽度/$2\pi/N$	过渡带宽 $\Delta\omega/2\pi/N$	通带最大衰减 A_{pass}/dB	阻带最小衰减 A_{stop}/dB	通、阻带过冲
矩形	−13	2	0.91	1.55	−21	8.9%
汉宁	−31	4	3.32	0.06	−44	0.34%
海明	−41	4	3.44	0.03	−54	0.2%
布莱克曼	−57	6	5.98	0.0035	−74	0.02%
凯塞	可调	可调	可调	17.327δ	$20\lg\delta$	δ 可调
凯塞($\alpha=7.865$)	−57	5	5	±0.000868(如 0.001736)	−80	$\delta=0.0001$

从表 7-2 中可以看出，矩形窗和海明窗设计的 FIR 滤波器通带(或阻带)因吉布斯

(Gibbs)效应分别有固定的 8.9%和 0.2%的过冲电平。除凯塞窗外，其他常用窗函数的幅度谱第一旁瓣的峰值电平相对其主瓣的电平值近似恒定。而用凯塞窗函数设计 FIR 滤波器，适当选择凯塞窗的 N、α 参数，或给定允许的滤波器通带、阻带过冲指标 δ，可以容易地满足要求的 FIR 滤波器指标。$\alpha=0$，退化为矩形窗；$\alpha=5$，除端点外，和海明窗几乎一样。

图 7-7 所示为设计数字 LPF 的幅度响应的参数定义。

A_{pass}：通带的波纹起伏，单位为 dB。

A_{stop}：相对理想低通滤波器通带增益，阻带增益最小衰减(单位为 dB)。除凯塞窗外，用其他窗函数设计 FIR 滤波器，能达到的参数 A_{stop} 近似恒定，如用矩形窗设计 FIR 滤波器，$A_{\text{stop}}=-21\text{dB}$。

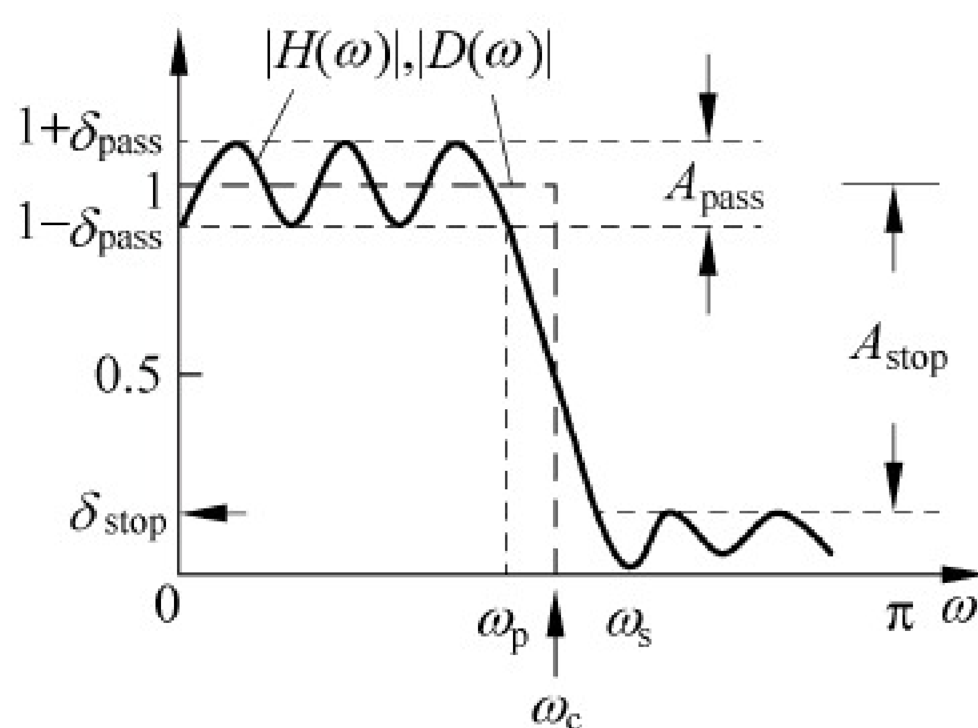


图 7-7 LPF 幅度响应的参数

根据图 7-7，可得到表 7-2 中各设计参数间的关系：$A_{\text{stop}}=20\lg\delta_{\text{stop}}$，$A_{\text{pass}}=20\lg\left(\dfrac{1+\delta_{\text{pass}}}{1-\delta_{\text{pass}}}\right)$。因为窗函数法设计的 FIR 滤波器，通带和阻带波纹是相等的，故工程应用中可假设通带、阻带波纹 δ 一样。

(4) 窗函数法设计的 FIR 滤波器的频响 $H(e^{j\omega})$与预期频响 $H_d(e^{j\omega})$的差异主要由对无限长的理想单位采样脉冲响应 $h_d(n)$时域加窗 $w(n)$引起。故设计的 FIR 滤波器特性在频域表现为：

- 使理想幅频特性不连续点附近形成过渡带。过渡带的宽度近似为窗谱幅度谱的主瓣宽。
- 设计的 FIR 滤波器过渡带两边产生肩峰和阻尼余振，振荡幅度取决于窗的幅度谱旁瓣峰值电平相对主瓣电平的衰减程度；振荡峰的数目多少，取决于窗的幅度谱旁瓣数目的多少。
- 改变窗函数长度(窗口 N)大小，会改变窗谱幅度的绝对大小和主、副瓣宽度；但不改变副瓣与主瓣的相对电平比例；此相对电平比例值，决定了设计的 FIR 滤波器通带的平稳性和阻带增益的最小衰减值。

7.1.3 频率采样法设计 FIR 滤波器

1. 设计思路

(1) 对设计滤波器的频谱 $H_d(e^{j\omega})$，在[0,2π]等间隔采样 N 点得 $H_d(k)$：

$$H_d(k)=\left|H_d(e^{j\omega})\right|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k},\quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.34}$$

(2) 求 $H_d(k)$的 N 点 IDFT 得 $h(n)$：

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \tag{7.1.35}$$

(3) 由所设计滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$，得到系统函数 $H(z)$：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-1} \tag{7.1.36}$$

从 $H_d(k)$也可由 DFT 的内插公式得出系统函数 $H(z)$：

$$H(z)=\frac{1}{N}(1-z^{-N})\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_d(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}} \tag{7.1.37}$$

式(7.1.36)和式(7.1.37)分别对应着所设计 FIR 滤波器实现的直接型、频率采样型网络结构。令 $z=e^{j\omega}$,代入式(7.1.37)可得所设计 FIR 滤波器频率响应 $H(e^{j\omega})$,逼近给定的 $H_d(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{N}e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}}\cdot\sum_{k=0}^{N-1}H_d(k)e^{-j\frac{\pi}{N}k}\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)} \tag{7.1.38}$$

2. 设计线性相位 FIR 滤波器,对 $H_d(e^{j\omega})$的采样点的要求

长为 N 的第一类线性相位 FIR 滤波器的频响函数 $H_d(e^{j\omega})=H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}$,在[0,2π]内等间隔采样 N 个频点,$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k$,简记幅度函数 $H_g(\omega)$的采样值为 $H_g(\omega_k)\equiv H_g(k)$,则滤波器频响函数的采样值为 $H_d(k)=H_g(k)e^{j\theta(k)}$,满足以下条件:

N=奇数,幅度函数采样值 $H_g(k)$对$\frac{N}{2}$(虚拟对称点)偶对称:

$$H_g(k)=H_g(N-k) \tag{7.1.39}$$

N=偶数,幅度函数采样值 $H_g(k)$对$\frac{N}{2}$奇对称:

$$H_g(k)=-H_g(N-k),\quad 且\ H_g\left(\frac{N}{2}\right)=0 \tag{7.1.40}$$

相位函数采样值均为:

$$\theta(k)=-\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k=-\frac{(N-1)\pi}{N}k,\quad k=0,1,2,\cdots,N-1 \tag{7.1.41}$$

3. 频率采样法的改进

为了减小所设计 FIR 滤波器的逼近误差,即降低通带边缘处由于采样点的突然变化而引起的滤波器频响特性的振荡起伏,可以在理想滤波器频响的不连续点边缘增加一定的过渡带采样点,从而增加过渡带宽,减小所设计滤波器频带边缘的起伏振荡,同时还可以增加滤波器阻带衰减。

7.1.4 优化技术设计

1. 优化准则

设要求设计的滤波器频响为 $H_d(e^{j\omega})$,实际设计的滤波器频响为 $H(e^{j\omega})$,则定义:

$$逼近误差\quad E(e^{j\omega})=H_d(e^{j\omega})-H(e^{j\omega}) \tag{7.1.42}$$

$$均方误差\quad e^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|E(e^{j\omega})|^2d\omega \tag{7.1.43}$$

1) 均方误差最小准则

矩形窗函数设计的 FIR 滤波器满足均方误差最小准则,即 $\min[e^2]$在整个频带上积分最小,它保证了设计的 FIR 滤波器具有最窄的过渡带;但由于吉布斯效应,过渡带附近的通带内有较大的上冲,而阻带衰减量不足。

2) 最大误差最小化准则(切比雪夫最佳一致逼近准则)

使逼近误差 $E(e^{j\omega})$的最大值为最小,即 $\min[\max|E(e^{j\omega})|]$,$\omega\in$整个频带(通带和阻带)。基于此准则设计的 FIR 滤波器在通带和阻带内,必呈现等波纹特性——等波纹切比

雪夫逼近。

2. 线性相位 FIR 滤波器的切比雪夫最优逼近

1）加权误差函数

设要求设计的滤波器幅度特性为 $H_d(\omega)$，实际设计的滤波器幅度特性为 $H_g(\omega)$，则加权误差为

$$E(\omega) = W(\omega)[H_d(\omega) - H_g(\omega)] \tag{7.1.44}$$

其中，$W(\omega)$为误差加权函数，在不同频带中可取不同值。

2）四种类型线性相位 FIR 滤波器的统一表示

四种类型的单位采样脉冲响应长为 N 的线性相位 FIR 滤波器的幅度特性统一表示如式(7.1.45)所示。

$$H_g(\omega) = Q(\omega)P(\omega) \tag{7.1.45}$$

其中，$Q(\omega)$是频率 ω 的固定函数，确知；$P(\omega)$是若干个余弦函数的线性组合。四种情况的 $Q(\omega)$和 $P(\omega)$如表 7-3 所示。

表 7-3　线性相位 FIR 滤波器四种情况

表达式		$H_g(\omega)$	$P(\omega)$	$Q(\omega)$	M
$h(n)=h(N-n-1)$ 偶对称	N=奇数	$\sum_{n=0}^{M} a(n)\cos(n\omega)$	$\sum_{n=0}^{M} a(n)\cos(n\omega)$	1	$\frac{N-1}{2}$
	N=偶数	$\sum_{n=1}^{M} b(n)\cos[(n-0.5)\omega]$	$\sum_{n=0}^{M-1} b'(n)\cos(n\omega)$	$\cos\frac{\omega}{2}$	$\frac{N}{2}$
$h(n)=-h(N-n-1)$ 奇对称	N=奇数	$\sum_{n=1}^{M} c(n)\sin(n\omega)$	$\sum_{n=0}^{M-1} c'(n)\cos(n\omega)$	$\sin\omega$	$\frac{N-1}{2}$
	N=偶数	$\sum_{n=1}^{M} d(n)\sin[(n-0.5)\omega]$	$\sum_{n=0}^{M-1} d'(n)\cos(n\omega)$	$\sin\omega$	$\frac{N}{2}$

表 7-3 中 $b'(n)$、$c'(n)$和 $d'(n)$与原系数 $b(n)$、$c(n)$和 $d(n)$之间的关系如式(7.1.46)～式(7.1.48)所示。

$$\begin{cases} b(1) = b'(0) + \frac{1}{2}b'(1) \\ b(n) = \frac{1}{2}[b'(n-1) + b'(n)] \quad n = 2,3,\cdots,M-1 \\ b(M) = \frac{1}{2}b'(M-1) \end{cases} \tag{7.1.46}$$

$$\begin{cases} c(1) = c'(0) - \frac{1}{2}c'(2) \\ c(n) = \frac{1}{2}[c'(n-1) - c'(n+1)] \\ c(M-1) = \frac{1}{2}c'(M-2) \\ c(M) = \frac{1}{2}c'(M-1) \end{cases} \quad n = 2,3,\cdots,M-2 \tag{7.1.47}$$

$$\begin{cases} d(1) = d'(0) - \frac{1}{2}d'(1) \\ d(n) = \frac{1}{2}[d'(n-1) - d'(n)] \quad n = 2,3,\cdots,M-1 \\ d(M) = \frac{1}{2}d'(M-1) \end{cases} \tag{7.1.48}$$

对应地，加权误差函数可以写为：

$$E(\omega) = W'(\omega)[H'_d(\omega) - P(\omega)] \tag{7.1.49}$$

式中，$W'(\omega)=W(\omega)Q(\omega)$；$H'_d(\omega)=\frac{H_d(\omega)}{Q(\omega)}$。

3）切夫雪夫等波纹逼近

给定 N、$H_d(\omega)$、$W(\omega)$，选定 FIR 滤波器的类型（表 7-1 所列四种之一），求解 $P(\omega)$的一组相应系数$\{a(n),b'(n),c'(n)$或$d'(n)\}$，使 $H_g(\omega)=Q(\omega)P(\omega)$在实现逼近的各频带上，$E(\omega)$的最大绝对值达到最小。即

$$\| E(\omega) \| = \min[\max | E(\omega) |], \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi \tag{7.1.50}$$

这种等波纹逼近的优化设计方法，使误差均匀地分布在频带中，具有优良的滤波特性，相比窗函数法和频率采样法，在同样过渡带较窄的情况下，通带最平稳，阻带有最大的最小衰减。

4）求最优解的方法

式(7.1.50)所示优化问题的求解可以用下列方法之一：

(1) 非线性方程法；

(2) 拉格朗日(Lagrange)内插多项式法；

这两种方法适用设计"误差函数 $E(\omega)$极点数目为最大可能值"(最多波纹)的 FIR 滤波器，且滤波器单位采样脉冲响应长度 N、通带波纹峰值 δ_1 和阻带波纹峰值 δ_2 固定，滤波器的通带截止频率 ω_p 和阻带截止频率 ω_s 不能预先规定，要在最优设计后才能算出。

(3) 雷米兹(Remez)交替算法，该算法较精确，在 N 固定时，能控制滤波器的通带截止频率 ω_p 和阻带截止频率 ω_s；

(4) 线性规划技术，适用设计对时域和频域都有约束的 FIR 滤波器。

5）切夫雪夫等波纹逼近的雷米兹法计算

切夫雪夫等波纹逼近的雷米兹法设计线性相位 FIR 滤波器的程序框图如图 7-8 所示。其中调用的雷米兹交替算法是利用交替定理来求解最佳逼近的一种优化算法，其流程图如图 7-9所示。图 7-9 中的参数 a_k，β_k 如式(7.1.51)和式(7.1.52)所示。

$$a_k = (-1)^k \prod_{i=0,i\neq k}^{r} \frac{1}{\cos\omega_i - \cos\omega_k} \tag{7.1.51}$$

$$\beta_k = (-1)^k \prod_{i=0,i\neq k}^{r-1} \frac{1}{\cos\omega_i - \cos\omega_k} \tag{7.1.52}$$

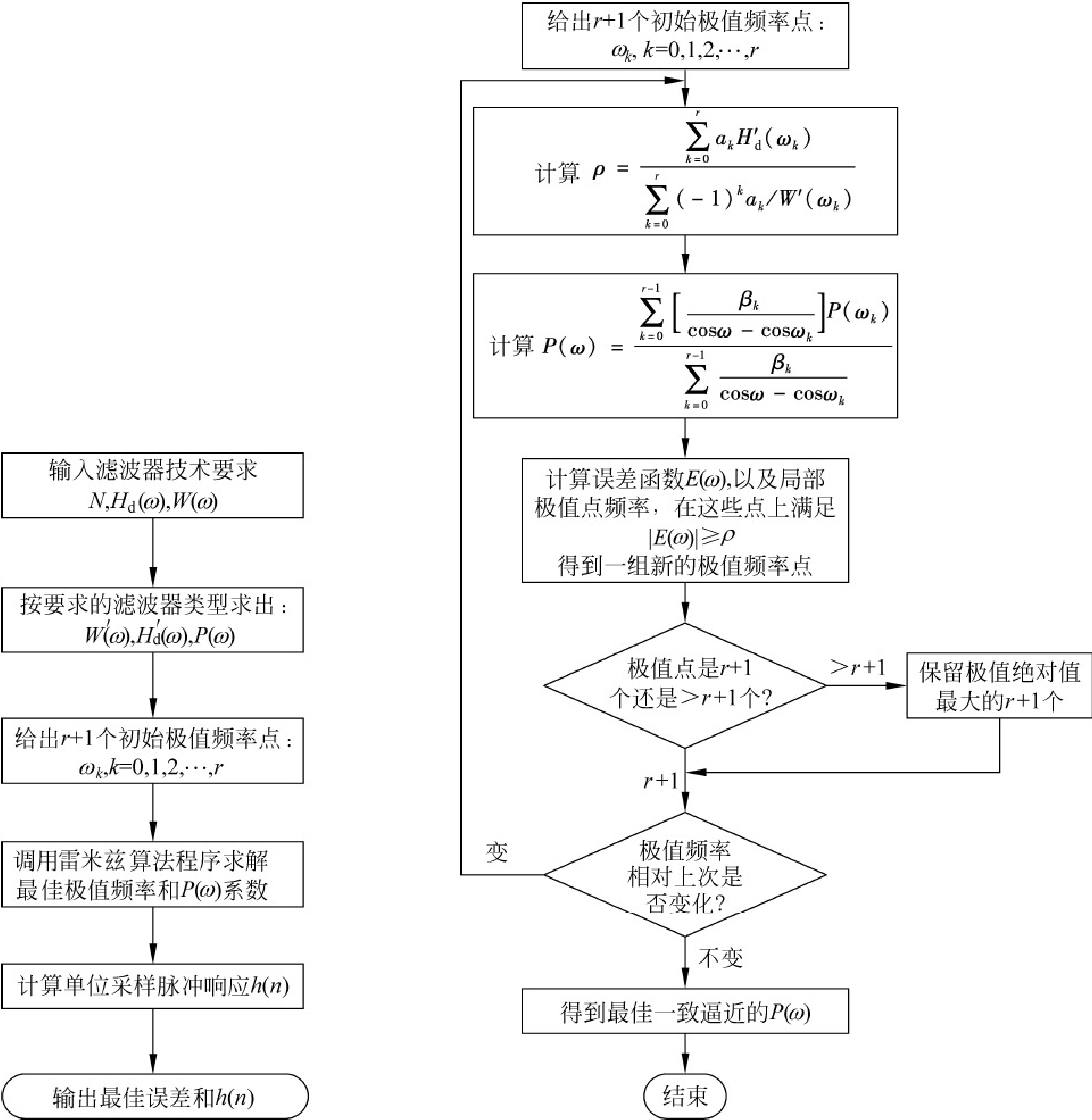


图 7-8　切夫雪夫逼近法设计线性相位 FIR 滤波器程序框图　　　图 7-9　雷米兹交替法流程图

7.1.5　IIR 和 FIR 滤波器的比较

IIR 与 FIR 滤波器的特点比较，如表 7-4 所示。

表 7-4　IIR 与 FIR 滤波器的比较

	IIR 滤波器	FIR 滤波器
稳定性	递归结构，极点必须在 z 平面单位圆内才能稳定，运算中的四舍五入处理，有时会引起寄生振荡	非递归结构，在理论及实际的有限精度的运算中，都是稳定的。有限精度运算误差较小
快速算法	无快速算法	可用 FFT 实现，加快运算速度
网络结构	直接型Ⅰ、直接型Ⅱ、级联型、并联型、转置型	直接型、级联型、线性相位型、频率采样型（修正频率采样型）

续表

	IIR 滤波器	FIR 滤波器
相频特性	非线性相频特性	线性相频特性
设计结果	实现幅频特性有分段常数特性的滤波器，如低通、高通、带通、带阻滤波器	灵活适应各种幅度特性和相位特性的要求，实现如正交变换、理想微分、线性调频等数字滤波器
设计方法	利用模拟滤波器设计的现成的闭合公式，数据和表格	没有现成设计公式，要借助于计算机程序

7.2　习题解答

7-1　试用窗函数法设计第一类线性相位 FIR 高通数字滤波器，取其 3dB 截止频率 $\omega_c=\frac{3\pi}{4}$rad，阻带增益至少衰减 $\alpha_s=50$dB，过渡带宽度 $\Delta\omega=\frac{\pi}{16}$ rad。

解：

（1）确定逼近理想高通频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c\leqslant|\omega|\leqslant\pi\\ 0, & 0\leqslant\omega<\omega_c\end{cases}$$

（2）求理想数字 HPF 的单位采样脉冲响应 $h_d(n)$：

$$\begin{aligned}h_d(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega+\int_{\omega_c}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\right]\\&=\frac{e^{j\omega(n-\alpha)}\Big|_{-\pi}^{-\omega_c}+e^{j\omega(n-\alpha)}\Big|_{\omega_c}^{\pi}}{2\pi j(n-\alpha)}\\&=\frac{1}{\pi(n-\alpha)}[\sin((n-\alpha)\pi)-\sin((n-\alpha)\omega_c)]\\&=\frac{\sin[(n-\alpha)\pi]}{\pi(n-\alpha)}-\frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{\pi(n-\alpha)}\end{aligned}$$

其中，$\alpha=\frac{N-1}{2}$为整数。

当 $n-\alpha=0$ 时，$\frac{\sin[(n-\alpha)\pi]}{\pi(n-\alpha)}=1$，故 $h_d(n)$可整理化简为：

$$h_d(n)=\delta(n-\alpha)-\frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{\pi(n-\alpha)}$$

（3）根据技术指标选择窗函数类型，确定窗函数长度：

根据阻带最小衰减 $\alpha_s=50$dB 选择窗函数为海明窗。根据过渡带宽要求 $\Delta\omega=\frac{\pi}{16}$rad，窗函数点数由$\frac{8\pi}{N}=\frac{\pi}{16}$得，$N=128$。由于设计第一类线性相位高通滤波器，所以 N 必须取奇

数，取 $N=129$。

(4) 加窗计算 $h(n)=h_d(n)\cdot w(n)$，海明窗表达式为

$$w_H(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]R_N(n)$$

代入 $N=129$，$\alpha=\dfrac{(N-1)}{2}=64$，$\omega_c=\dfrac{3\pi}{4}$ rad 得

$$h(n)=\frac{1}{\pi(n-64)}\left[\sin((n-64)\pi)-\sin\left((n-64)\frac{3\pi}{4}\right)\right]\cdot$$
$$\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{128}\right)\right]R_{129}(n)$$

(5) 在频域检验设计结果：

$$H(e^{j\omega})=FT[h(n)]$$

通过对 $h(n)$ 做 1024 点 DFT，绘出 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ 曲线，由图 7-10 的幅频衰减特性曲线可知结果满足设计要求。

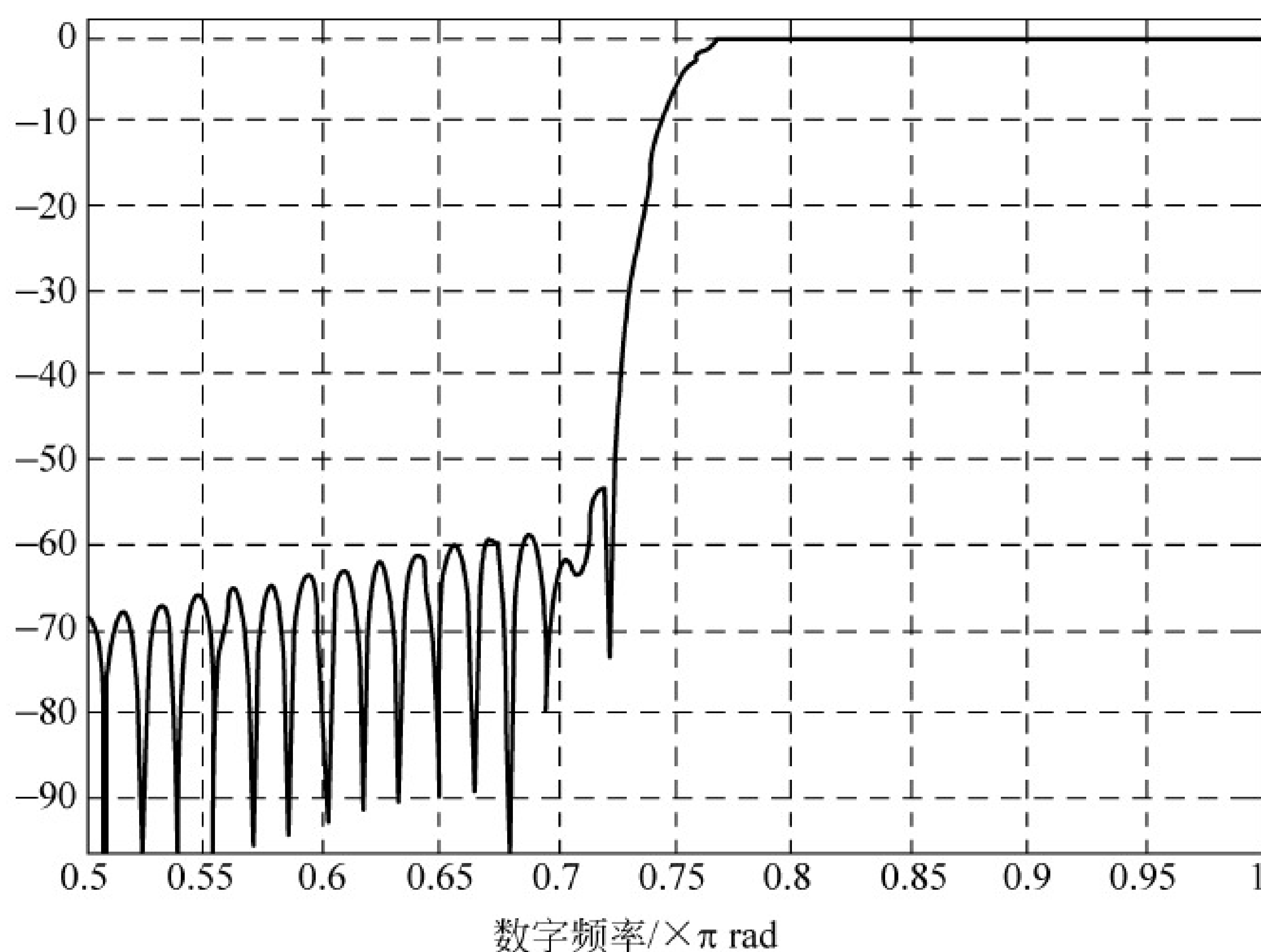


图 7-10 题 7-1 解图

7-2 试用频率采样法设计第一类线性相位 FIR 低通数字滤波器。要求通带截止频率为 $\omega_c=\dfrac{\pi}{16}$rad，过渡带宽 $\Delta\omega\leqslant\dfrac{\pi}{32}$rad，阻带增益至少衰减 $\alpha_s=40$dB。

解：

(1) 确定 $H_d(e^{j\omega})$，估计采样点数 N：

由设计要求 $\Delta\omega\leqslant\dfrac{\pi}{32}$rad，$\alpha_s\geqslant40$dB，取过渡带采样数 $m=1$，采样点数

$$N=\frac{2\pi}{\Delta\omega}(m+1)=\frac{4\pi}{\pi/32}=128$$

第一类线性相位 FIR 滤波器 N 为偶数时，$H_d(\omega)=-H_d(2\pi-\omega)$，所以依题意

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\frac{127}{2}}, & 0\leqslant\omega\leqslant\frac{\pi}{16}\\0, & \frac{\pi}{16}<\omega<\frac{31\pi}{16}\\-e^{-j\omega\frac{127}{2}}, & \frac{31\pi}{16}\leqslant\omega<2\pi\end{cases}$$

(2) 频响的频率采样点：

$$H_d(k)=H_d(e^{j\omega_k})=\begin{cases}e^{-j\frac{127}{128}\pi k}, & k=0,1,2,3,4\\0.3904e^{-j\frac{127}{128}5\pi}, & k=5(\text{过渡采样点})\\0, & k=6\sim122\\-0.3904e^{-j\frac{127}{128}123\pi}, & k=123(\text{过渡采样点})\\-e^{-j\frac{127}{128}\pi k}, & k=124,125,126,127\end{cases}$$

(3) 用内插公式求 $H(z)$：

$$H(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_d(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

(4) 检验设计指标：

$$|H_d(e^{j\omega})|=\frac{1-e^{-j\omega n}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H_d(k)}{1-W_{128}^{-k}e^{-j\omega}}$$

由上式分析 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ 频谱图知，设计基本满足指标要求，由于 $h(n)=h(N-1-n)$，所以必然有第一类线性相位。

(5) 由 $H(z)$ 可以画出频率采样结构，答案从略。

7-3　设 FIR 滤波器的系统函数为：

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\frac{1}{10}(1+0.9z^{-1}+2.1z^{-2}+0.9z^{-3}+z^{-4})$$

求出该滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$，判断是否具有线性相位；求出其幅度特性和相位特性，并画出其直接型和线性相位型结构。

解：对 FIR 滤波器而言，其系统函数为

$$H(z)=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)z^{-n}=\frac{1}{10}(1+0.9z^{-1}+2.1z^{-2}+0.9z^{-3}+z^{-4})$$

其单位采样脉冲响应为 $h(n)=\{0.1,0.09,0.21,0.09,0.1\}$。

由 $h(n)$ 的形式可知：

$$h(n)=h(N-1-n),\quad N=5$$

即具有第一类线性相位特性。频率响应函数为：

$$H(e^{j\omega})=H_g(\omega)e^{j\theta(\omega)}=\sum_{n=0}^{N-1}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{10}(2.1+1.8\cos\omega+2\cos2\omega)e^{-2j\omega}$$

所以，幅频特性函数为：

$$H_g(\omega)=\frac{1}{10}(2.1+1.8\cos\omega+2\cos2\omega)$$

相频特性函数为：

$$\theta(\omega)=-2\omega$$

由 $h(n)$ 画出直接型结构和线性相位型结构分别如图 7-11 和图 7-12 所示。幅度特性如图 7-13 所示。

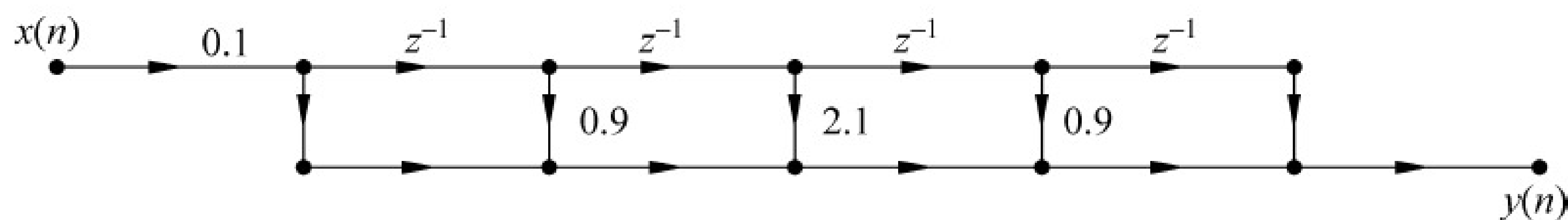


图 7-11　题 7-3 解图一

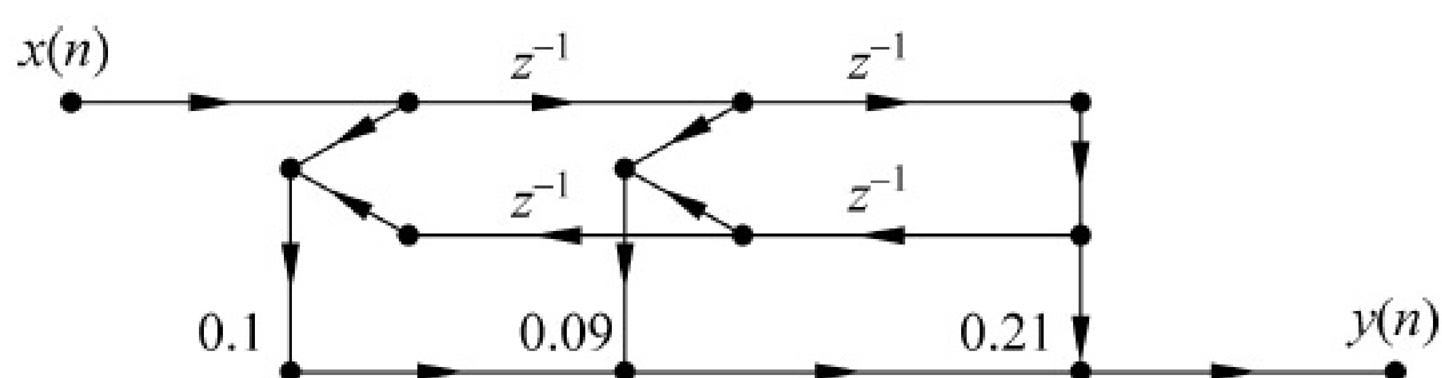


图 7-12　题 7-3 解图二

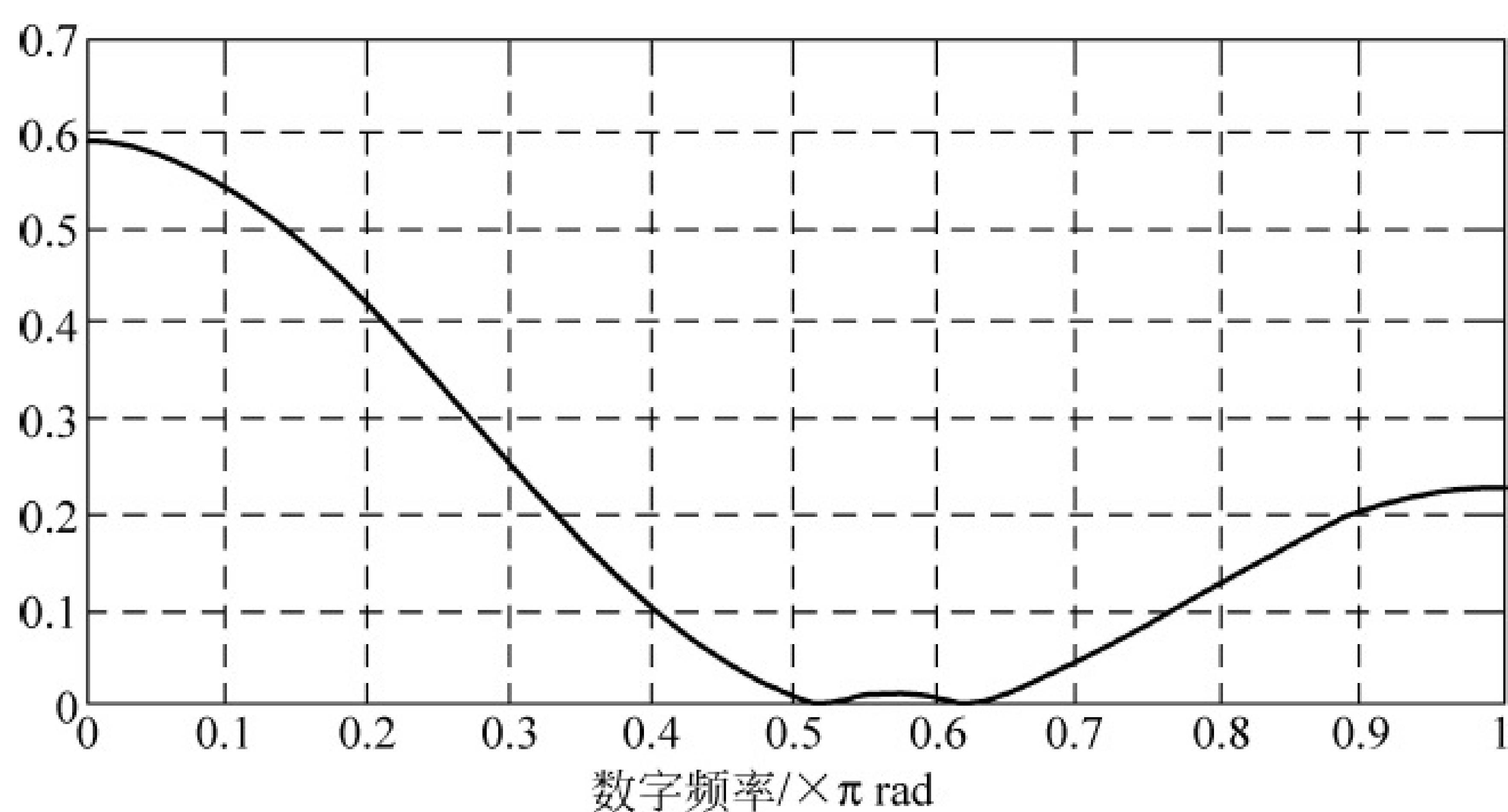


图 7-13　题 7-3 解图三

7-4　用矩形窗函数设计线性相位低通 FIR 滤波器，逼近滤波器的传输函数为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, & 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_c\\ 0, & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

（1）求出相应于理想低通滤波器的单位采样脉冲响应 $h_d(n)$；

（2）求出矩形窗函数设计法得到的 $h(n)$ 表达式，确定滤波器群时延 α 与 $h(n)$ 的长度 N 之间的关系；

（3）N 取奇数或偶数对 FIR 滤波器的特性有什么影响？

解：

（1）$h_d(n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{-j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega=\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$

（2）$h(n)=h(n)\cdot R_N(n)=\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}\cdot R_N(n)$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, & 0\leqslant n\leqslant N-1,\alpha=\dfrac{(N-1)}{2}\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

(3) N 为奇数时，幅频特性函数关于 $\omega=0,\pi,2\pi$ 三点偶对称，可实现各类滤波特性；N 为偶数时，幅频特性函数关于 $\omega=\pi$ 奇对称，所以不能实现高通、带阻滤波特性。

7-5　用矩形窗函数设计一线性相位高通 FIR 滤波器，逼近滤波器的传输函数 $H_d(e^{j\omega})$ 为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, & \omega_c\leqslant|\omega|\leqslant\pi\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 求出该理想高通滤波器的单位采样脉冲响应 $h_d(n)$；

(2) 求出矩形窗函数设计法得到的 $h(n)$ 表达式，确定滤波器群时延 α 与 $h(n)$ 的长度 N 之间的关系；

(3) N 的取值有什么限制？为什么？

解：

(1)
$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{-j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega+\int_{\omega_c}^{\pi}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega\right]$$
$$=\delta(n-\alpha)-\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}$$

上式第一项为线性全通滤波器的单位采样脉冲响应，第二项为截止频率为 ω_c 的低通滤波器对应的单位采样脉冲响应，即高通滤波器的单位采样脉冲响应可由全通滤波器的单位采样脉冲响应减去低通滤波器的单位采样脉冲响应来实现。

(2) $h(n)=\left\{\delta(n-\alpha)-\dfrac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}\right\}R_N(n)$

为了满足线性相位条件，$h(n)=h(N-1-n)$，要求 α 满足 $\alpha=\dfrac{N-1}{2}$。

(3) N 必须取奇数。因为 N 为偶数时，$H(e^{j\pi})=0$，不能实现高通。

7-6　在图 7-14 中，$h_1(n)$ 是偶对称序列，$N=8$，$h_2(n)$ 是 $h_1(n)$ 的圆周移位$\left(\text{移}\dfrac{N}{2}=4\text{ 点}\right)$后的序列，设

$$H_1(k)=\text{DFT}[h_1(n)],\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$
$$H_2(k)=\text{DFT}[h_2(n)],\quad k=0,1,2,\cdots,N-1$$

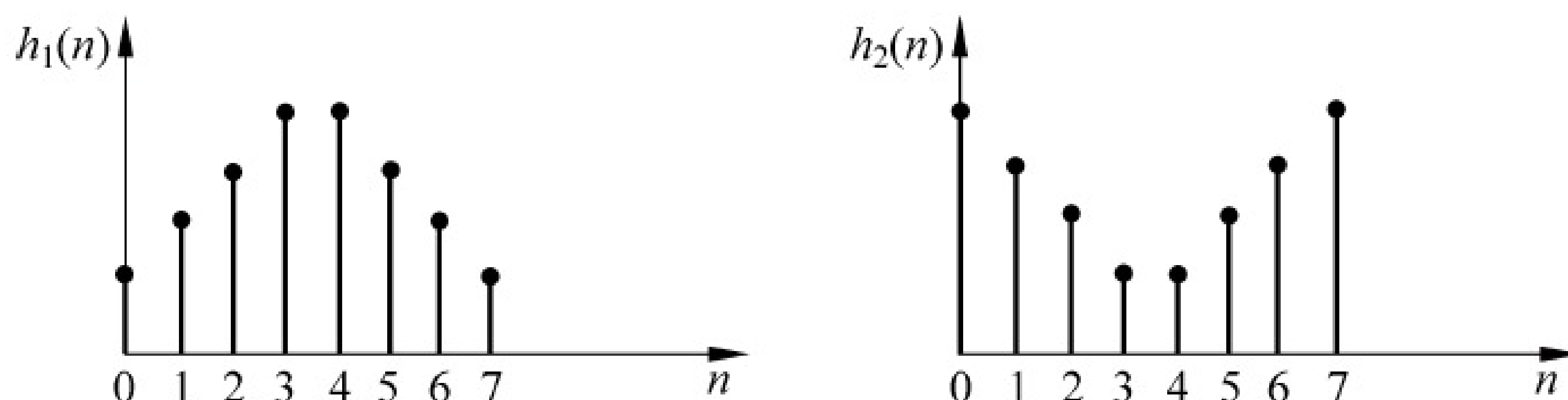


图 7-14　题 7-6 图

(1) $|H_1(k)|=|H_2(k)|$是否成立？为什么？

(2) 用$h_1(n)$和$h_2(n)$分别构成的低通 FIR 滤波器是否具有线性相位？群延时是多少？

解：

(1) 由图 7-14 可知，$h_1(n)$和$h_2(n)$为循环移位关系。

$$h_2(n)=h_1((n+4))_8R_8(n)$$

由 DFT 循环移位性质可知：

$$H_2(k)=e^{j\pi k}H_1(k)=(-1)^kH_1(k)$$

即

$$|H_2(k)|=|H_1(k)|$$

(2) 由图 7-14 可知，$h_1(n)$和$h_2(n)$满足线性相位条件：

$$h_1(n)=h_1(N-1-n)$$

$$h_2(n)=h_2(N-1-n)$$

设

$$H_1(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[h(n)]=H_{1g}(\omega)e^{j\theta_1(\omega)}$$

$$H_2(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[h(n)]=H_{2g}(\omega)e^{j\theta_2(\omega)}$$

由第一类线性相位滤波器相位函数特性可知

$$\theta_1(\omega)=\theta_2(\omega)=-\frac{1}{2}(N-1)\omega=-\frac{7}{2}\omega$$

群延时为

$$\tau_1=\tau_2=-\frac{d\theta_1(\omega)}{\omega}=\frac{7}{2}$$

7-7 利用矩形窗、升余弦窗、改进升余弦窗、和布莱克曼窗设计线性相位 FIR 低通滤波器。要求通带截止频率$\omega_c=\frac{\pi}{4}$rad，窗函数长度$N=21$。求出分别对应的 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应，绘出它们的幅频特性并进行比较。

解：依题意，理想低通滤波器的频率响应为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, & 0\leqslant|\omega|\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0, & \frac{\pi}{4}<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

其中，$\alpha=\frac{N-1}{2}=10$。

$h_d(n)$可由频率响应函数$H_d(e^{j\omega})$进行 IDTFT 得：

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}e^{-j\omega 10}e^{-j\omega n}d\omega=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)}$$

加窗得 FIR 滤波器单位采样脉冲响应$h(n)$。

(1) 加矩形窗

$$w_R(n)=R_N(n)$$

$$h_R(n)=h_d(n)\cdot w(n)=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)}\cdot R_{21}(n)$$

频率特性曲线如图 7-15 所示。

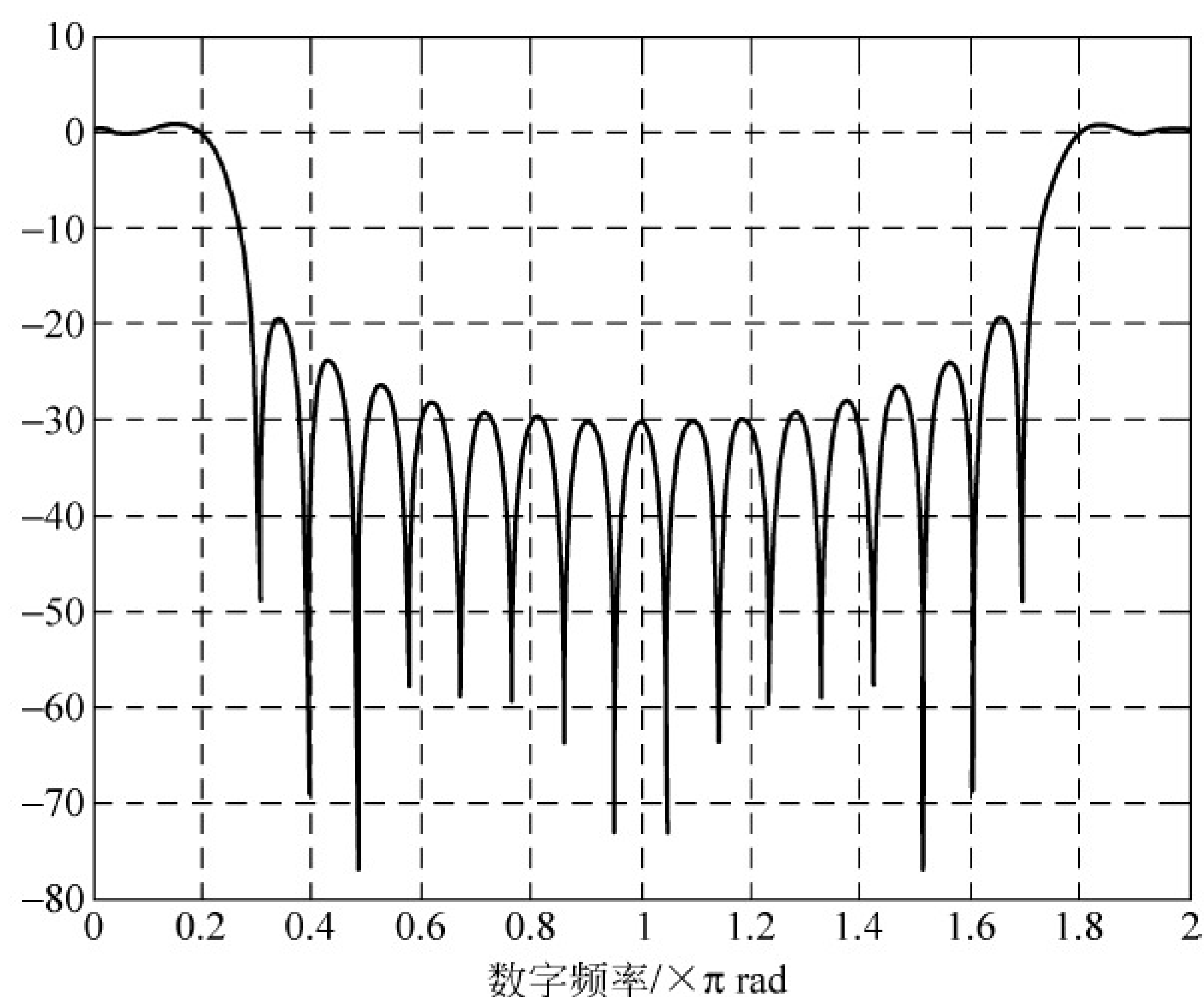


图 7-15 题 7-7 解图一——矩形窗设计的 LPF 幅频响应

（2）加升余弦窗

$$w_{\mathrm{Hn}}(n)=0.5\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\cdot R_N(n)$$

$$h_{\mathrm{Hn}}(n)=h_{\mathrm{d}}(n)\cdot w(n)=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{2\pi(n-10)}\cdot\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right)\right]\cdot R_{21}(n)$$

频率特性曲线如图 7-16 所示。

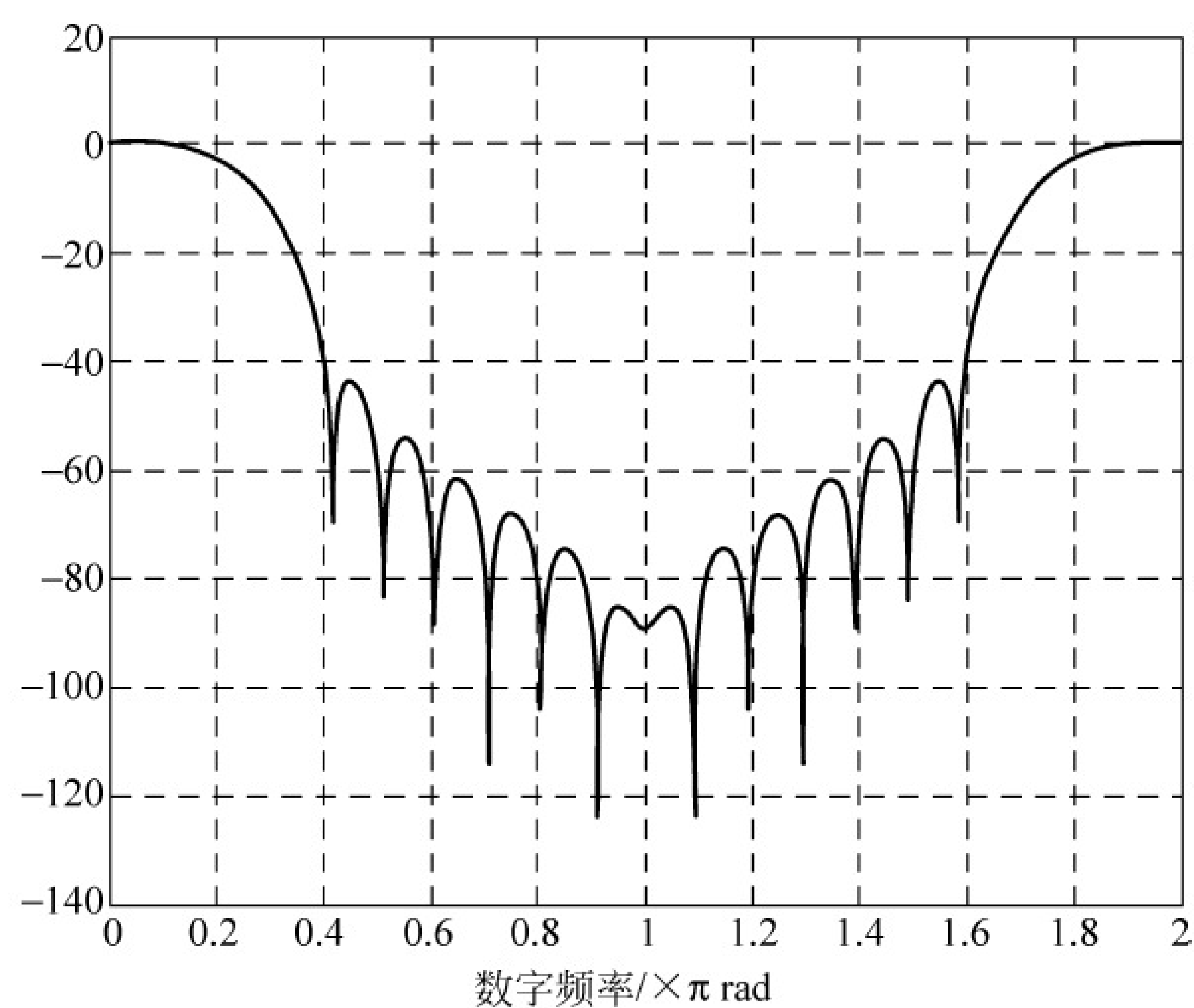


图 7-16 题 7-7 解图二——升余弦窗设计的 LPF 幅频响应

（3）加改进升余弦窗

$$w_{\mathrm{Hm}}(n)=\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\cdot R_N(n)$$

$$h_{\mathrm{Hm}}(n)=h_{\mathrm{d}}(n)\cdot w(n)=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)}\cdot\left[0.54-0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right)\right]\cdot R_{21}(n)$$

频率特性曲线如图 7-17 所示。

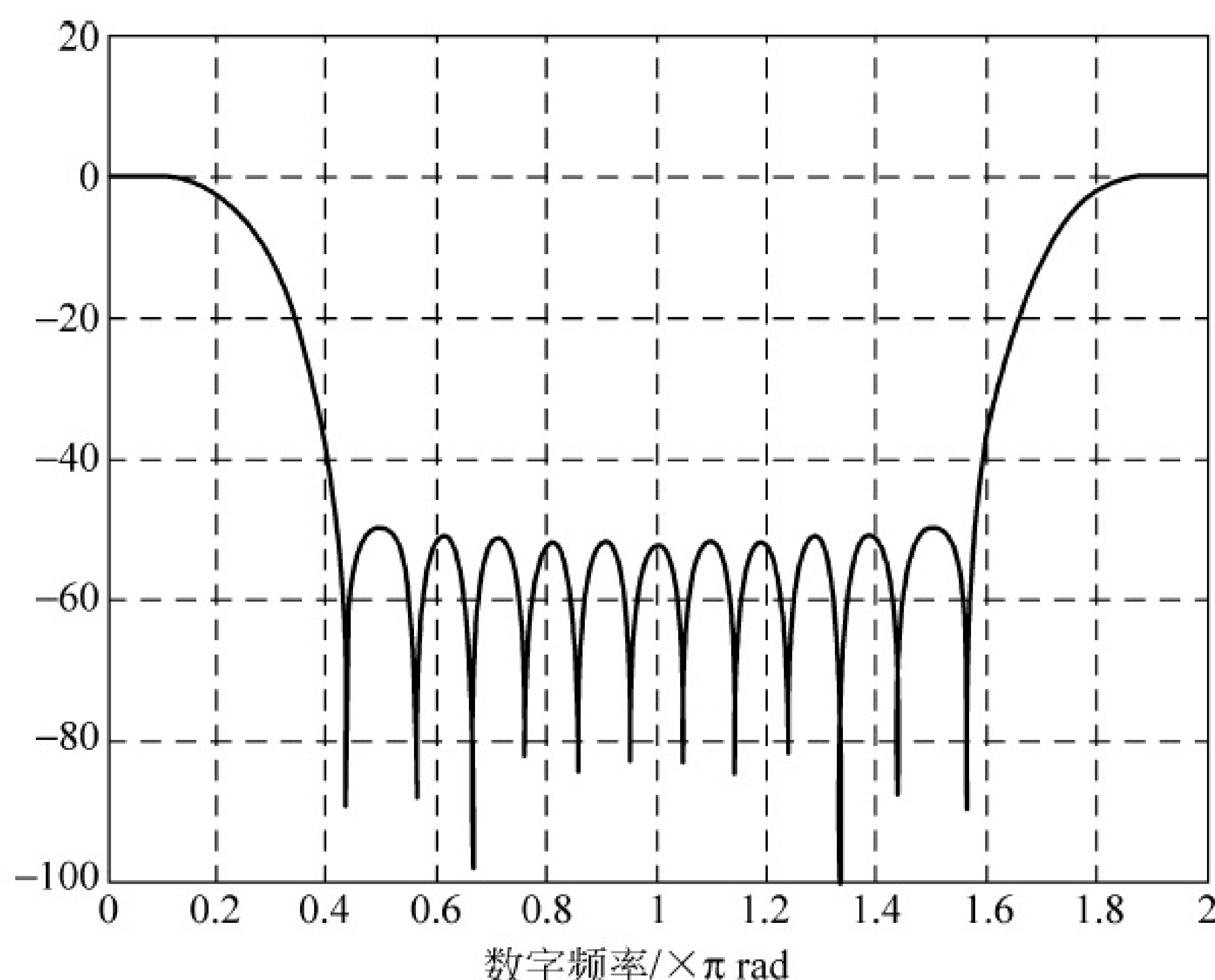


图 7-17　题 7-7 解图三——改进的升余弦窗设计的 LPF 幅频响应

（4）加布莱克曼窗

$$w_{\mathrm{Bl}}(n)=\left[0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)+0.08\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)\right]\cdot R_N(n)$$

$$h_{\mathrm{Bl}}(n)=h_{\mathrm{d}}(n)\cdot w(n)=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4}(n-10)\right]}{\pi(n-10)}\cdot\left[0.42-0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right)+0.08\left(\frac{4\pi n}{20}\right)\right]\cdot R_{21}(n)$$

频率特性曲线如图 7-18 所示。

由图 7-15～图 7-18 的幅频特性曲线可知，矩形窗对应的过渡带宽最窄，但阻带最小衰减只有−20dB；布莱克曼窗对应阻带衰减最大，但其过渡带宽最宽。

7-8　利用矩形窗函数法和频率采样法设计线性相位 FIR 低通滤波器，将两个设计结果进行比较。设滤波器的单位采样脉冲响应长 $N=16$，给定希望逼近滤波器的幅度采样值为

$$H_{\mathrm{dg}}(k)=\begin{cases}1, & k=0,1,2,3\\0.389, & k=4\\0, & k=5,6,7\end{cases}$$

解：

（1）矩形窗函数设计

取理想低通滤波器截止频率 ω_c 为

$$\omega_c=\left(\frac{2\pi}{N}\times 4\right)\mathrm{rad}=\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$$

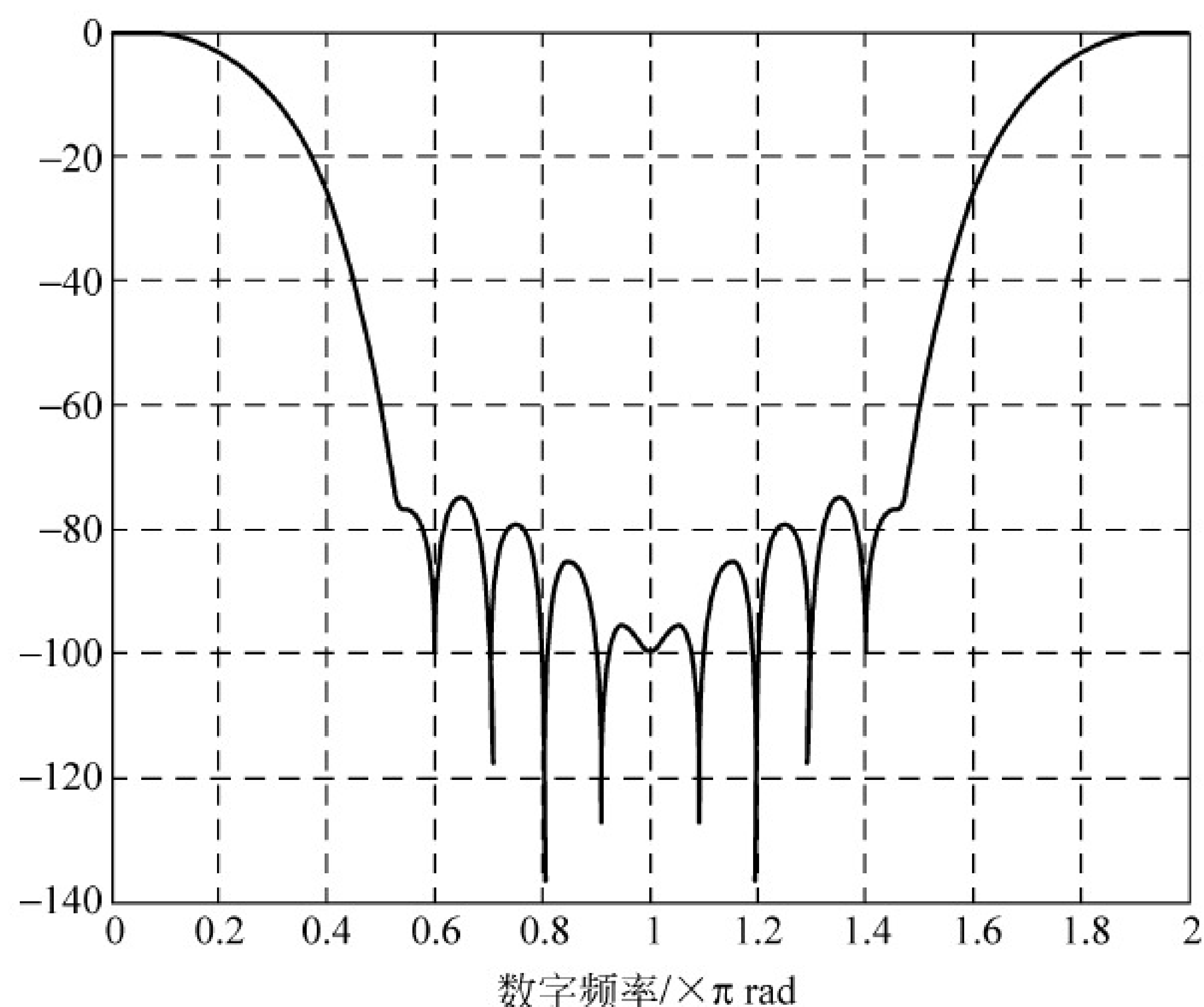


图 7-18　题 7-7 解图四——布莱克曼窗设计的 LPF 幅频响应

理想低通滤波器频率响应函数 $H_d(e^{j\omega})$为

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega\alpha}, & 0\leqslant|\omega|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\alpha=\dfrac{N-1}{2}=\dfrac{15}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<|\omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}H_d(e^{j\omega})e^{-j\omega n}\,d\omega=\frac{\sin\left[\dfrac{\pi}{2}\left(n-\dfrac{15}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\dfrac{15}{2}\right)}$$

$$h(n)=h_d(n)\cdot R_{16}(n)=\frac{\sin\left[\dfrac{\pi}{2}\left(n-\dfrac{15}{2}\right)\right]}{\pi\left(n-\dfrac{15}{2}\right)}\cdot R_{16}(n)$$

幅频特性曲线如图 7-19 所示。

(2) 频率采样法设计

由希望逼近的滤波器幅度采样 $H_{dg}(k)$可构造出 $H_d(e^{j\omega})$的采样 $H_d(k)$。因为 $N=16$ 为偶数,幅度函数采样值 $H_{dg}(k)$对$\dfrac{16}{2}=8$ 样值点奇对称,线性相位函数为:

$$\theta(k)=-\frac{N-1}{N}\pi k=-\frac{15}{16}\pi k$$

故频响采样值具体为:

$$H_d(k)=\begin{cases}e^{-j\frac{15}{16}\pi k}, & k=0,1,2,3\\ 0.389e^{-j\frac{15}{16}\pi k}, & k=4\\ 0, & k=5,6,7,8,9,10,11\\ -0.389e^{-j\frac{15}{16}\pi k}, & k=12\\ -e^{-j\frac{15}{16}\pi k}, & k=13,14,15\end{cases}$$

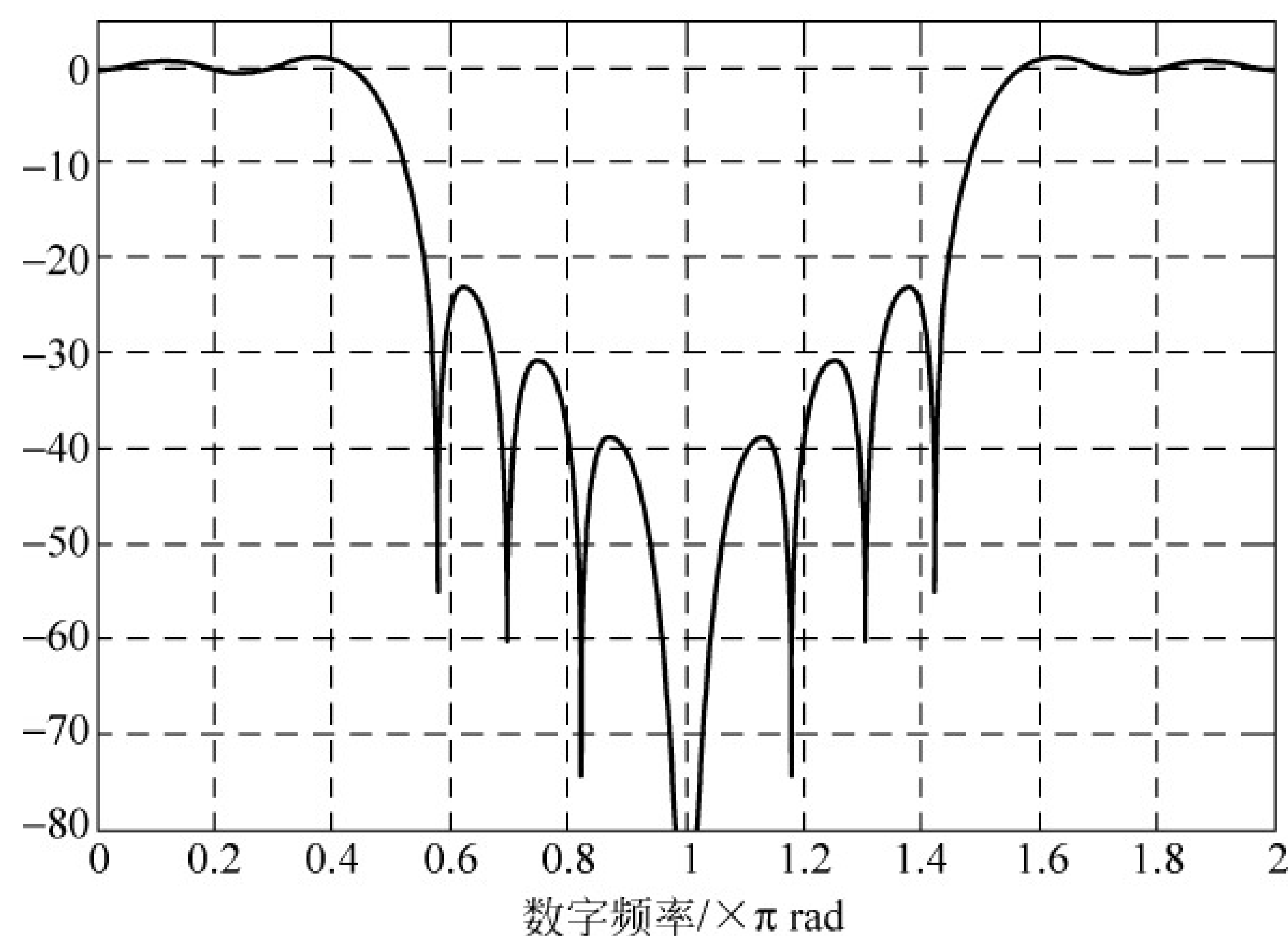


图 7-19　题 7-8 解图一——矩形窗设计的 FIR LPF 幅频响应

$$
=\begin{cases}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{16}k}, & k=0,1,2,3\\ 0.389(-1)^k e^{j\frac{\pi}{16}k}, & k=4\\ 0, & k=5,6,7,8,9,10,11\\ -0.389(-1)^k e^{j\frac{\pi}{16}k}, & k=12\\ -(-1)^k e^{j\frac{\pi}{16}k}, & k=13,14,15\end{cases}
$$

$$
h(n)=\mathrm{IDFT}[H_d(k)]=\frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15}H_d(k)W_{16}^{-kn}R_{16}(n)
$$

$$
=\frac{1}{16}\left\{\sum_{k=0}^{3}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{16}k}e^{j\frac{2\pi}{16}kn}-\sum_{k=13}^{15}(-1)^k e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)k}+\right.
$$

$$
\left.0.389\left[e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 4}-e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot 12}\right]\right\}
$$

$$
=\frac{1}{16}\{1-e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)}+e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)15}+e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)2}-e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)14}-
$$

$$
e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)3}+e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)13}+0.389[e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)4}-e^{j\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)12}]\}
$$

$$
=\frac{1}{16}\left\{1-2\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]+2\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]-\right.
$$

$$
\left.2\cos\left[\frac{3\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]+0.778\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right\}
$$

$$
=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}-\cos\left[\frac{\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]+\cos\left[\frac{\pi}{4}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]-\right.
$$

$$
\left.\cos\left[\frac{3\pi}{8}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]+0.389\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]\right\},\quad n=0,1,2,\cdots,15
$$

幅频特性曲线如图 7-20 所示。

比较图 7-19 和图 7-20 可知，使用矩形窗函数设计的 FIR 滤波器过渡带宽较窄，但阻带最小衰减只有−23dB 左右；而使用频率采样法，取一个过渡采样点，所设计的 FIR 滤波

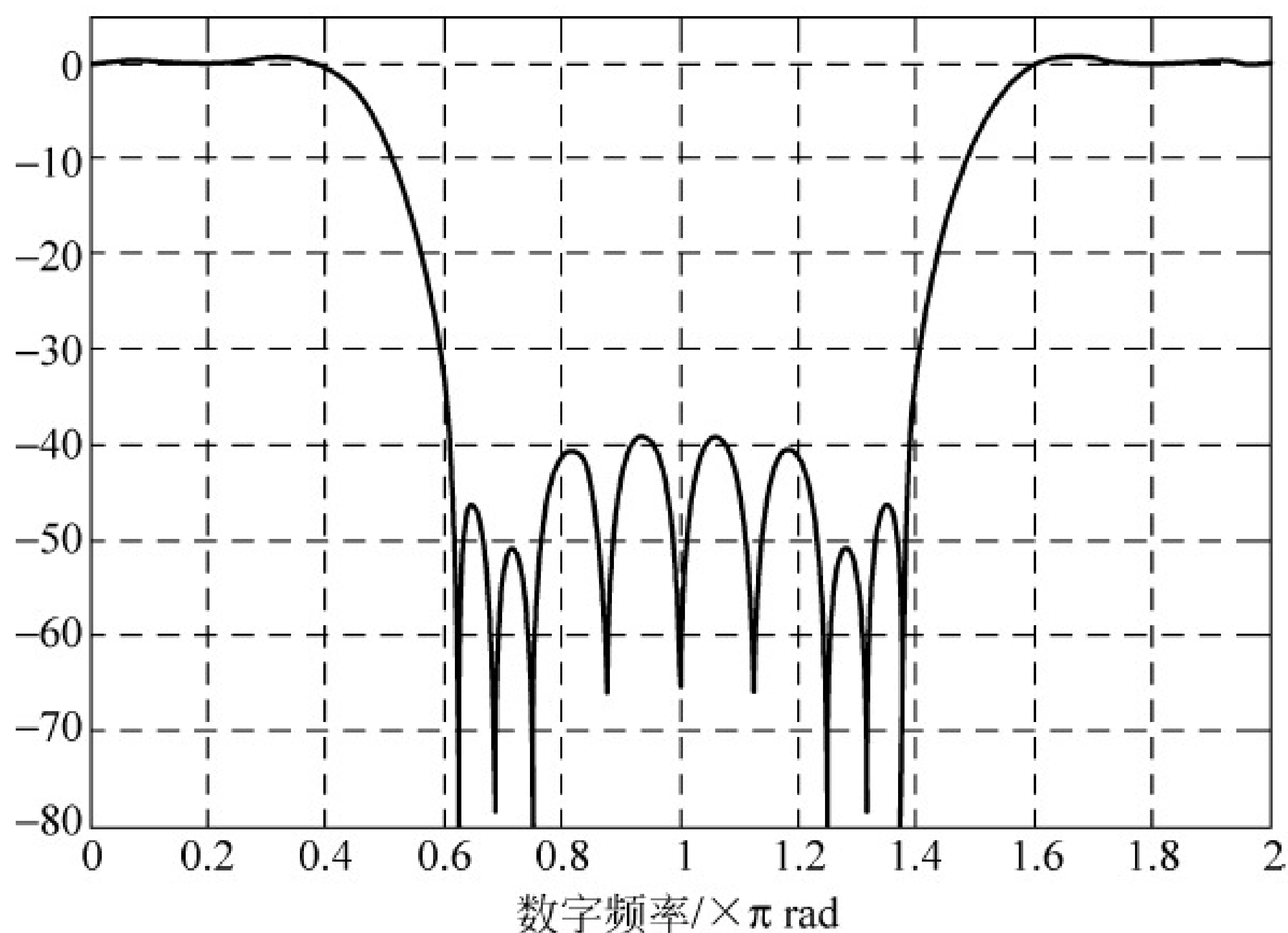


图 7-20 题 7-8 解图二——频率采样法设计的 FIR LPF 幅频响应

器的过渡带较宽，但阻带最小衰减可达 40dB 左右。

7-9 设信号 $x(t)=s(t)+v(t)$，其中 $v(t)$ 是干扰，$s(t)$ 和 $v(t)$ 的频谱不混叠，其幅度谱如图 7-21 所示。要求设计一数字滤波器，将干扰滤除，指标是允许 $|S(f)|$ 在 $0\leqslant f\leqslant 15\text{kHz}$ 频率范围内幅度失真 ±2%（$\delta_1=0.02$）；$f>20\text{kHz}$，幅度衰减大于 40dB（$\delta_2=0.01$）；要求分别用 FIR 和 IIR 两种滤波器进行滤除干扰，最后进行比较。

解：由题意知，等效模拟滤波器的设计指标为：

通带带宽 $0\leqslant f\leqslant 15\text{kHz}$，幅度失真为 $\delta_1=0.02$，$f_c=15\text{kHz}$；

阻带带宽 $f>20\text{kHz}$，衰减大于 40dB，即 $\delta_2=0.01$，$f_{st}=20\text{kHz}$。

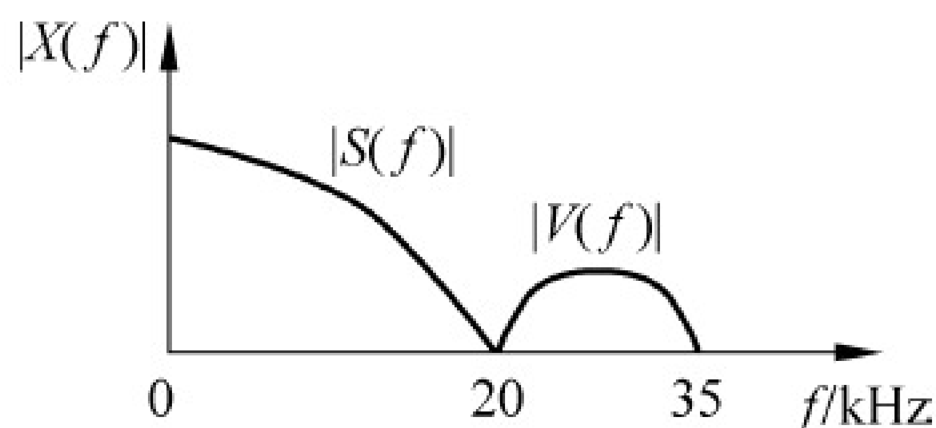


图 7-21 题 7-9 图

现取采样频率 $f_s=80\text{kHz}$，由此可得对应的数字滤波器的技术指标如下。

通带截止频率：

$$\omega_c = 2\pi\frac{f_c}{f_s} = \frac{3}{8}\pi = 0.375\pi\ \text{rad}$$

通带纹波：

$$\delta_1 = 0.02$$

阻带截止频率：

$$\omega_{st} = 2\pi\frac{f_{st}}{f_s} = \frac{\pi}{2} = 0.5\pi\ \text{rad}$$

阻带最小衰减：

$$\alpha_s = 40\text{dB}$$

该滤波器可以使用窗函数法、频率采样法等来进行设计。本题使用等波纹最佳一致逼近法来设计一个 FIR 滤波器，选用椭圆滤波器设计一个 IIR 滤波器。设计采用 MATLAB 辅助设计工具。

FIR 滤波器设计程序为：

```
fc = 15000;
fst = 20000;
fs = 80000;
f = [fc fst];
m = [1 0];
dev = [0.02 0.01];
[N,f0,m0,w] = firpmord(f,m,dev,fs);
N = N + 1
hn = firpm(N,f0,m0,w)
H = fft(hn,512);
w = 0:2/512:(2 - 2/512);
subplot(3,2,1),plot(w,20 * log10(abs(H)));grid
xlabel('频率(\omega \times\pi)')
ylabel('幅度(dB)')
```

长度 N 和 $h(n)$ 数据如下：

```
N =  29
hn =
  0.0037  -0.0084  -0.0128  -0.0004   0.0164   0.0077  -0.0215
 -0.0228   0.0211   0.0466  -0.0094  -0.0854  -0.0326   0.1867
  0.4007   0.4007   0.1867  -0.0326  -0.0854  -0.0094   0.0466
  0.0211  -0.0228  -0.0215   0.0077   0.0164  -0.0004  -0.0128
 -0.0084   0.0037
```

幅频特性曲线如图 7-22 所示。

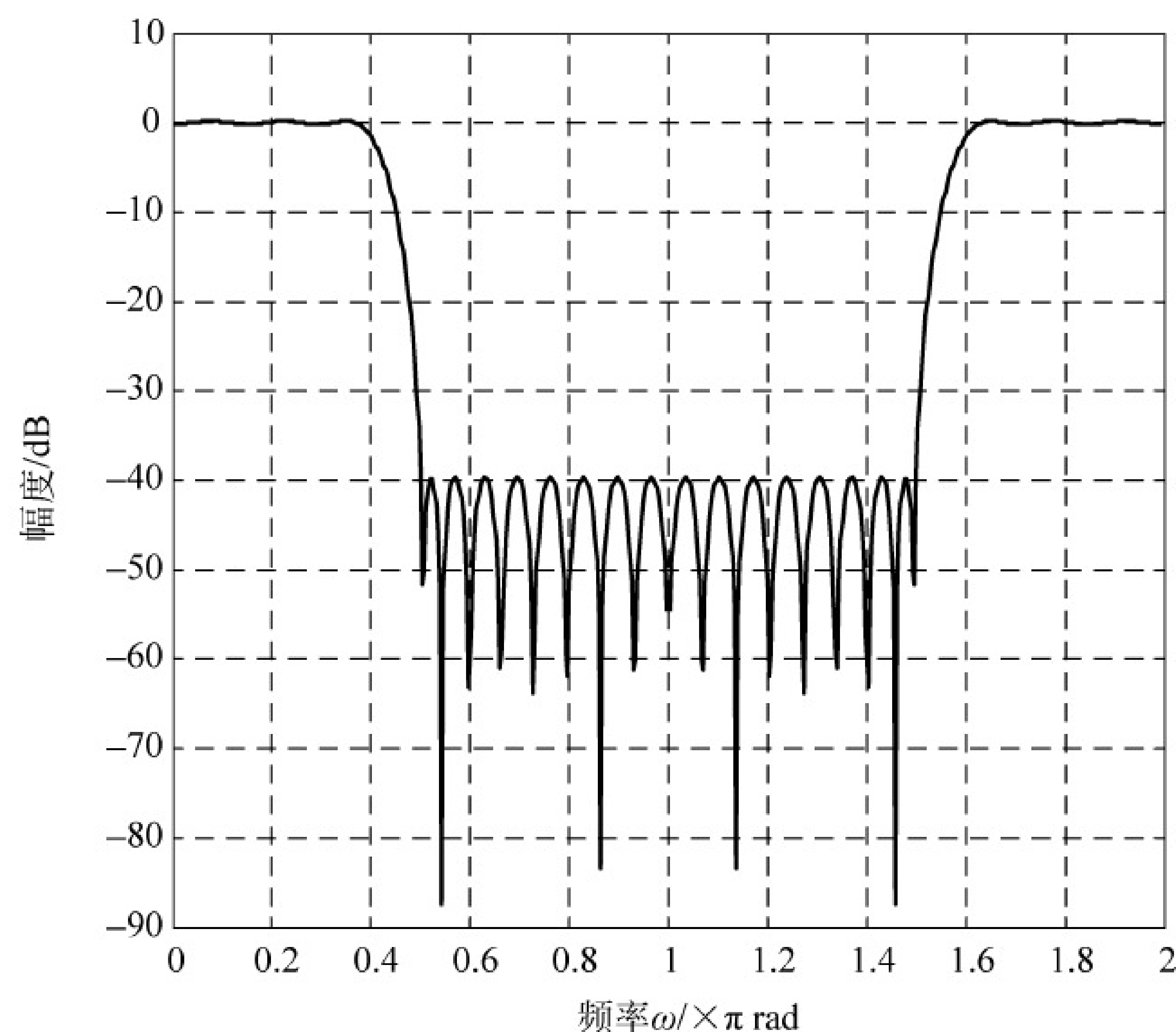


图 7-22 题 7-9 解图一

IIR 滤波器设计程序为：

```
Wp = 3/8;dev1 = 0.02;
Ws = 0.5;
```

```
Rp = 20 * log10((1 + dev1)/(1 - dev1));
Rs = 40;
[N,wc] = ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs)
[b,a] = ellip(N,Rp,Rs,wc)
[hw,w] = freqz(b,a);
subplot(1,2,1);
plot(w/pi,20 * log10(abs(hw)));grid
axis([0,1, - 80,5]);xlabel('频率 \omega (\times \pi rad.)');ylabel('幅度 (dB)')
subplot(1,2,2);plot(w/pi,angle(hw));
grid;axis([0,1, - 5,5])
xlabel('频率 \omega (\times \pi rad.)');ylabel('相位 (rad.)')
```

滤波器参数如下：

```
N =     5
wc =     0.3750
b =
        0.0476    0.0618    0.1042    0.1042  0.0618    0.0476
a =
        1.0000   - 1.9885    2.6833   - 2.0231  0.9772   - 0.2219
```

幅频特性和相频特性曲线如图 7-23 所示。

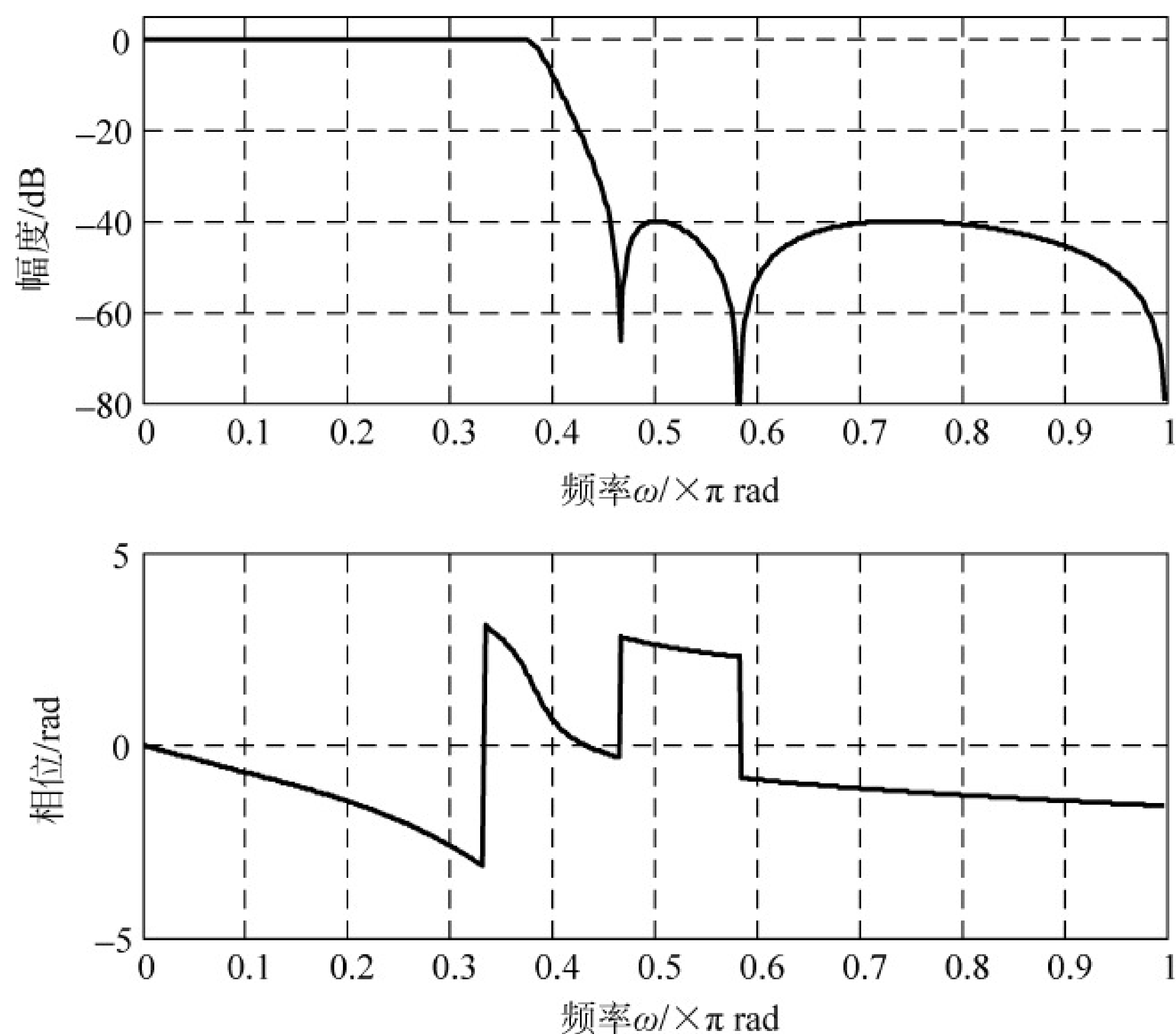


图 7-23　题 7-9 解图二

比较 FIR 和 IIR 滤波器设计结果可得出以下结论：

(1) 所设计的两种数字 LPF 的通带截止频率、阻带边缘频率分别为 0.375π rad、0.5π rad，可以较好地滤除信号中的干扰频谱；

(2) 对相同的设计指标，FIR 滤波器阶数(29 阶)比椭圆型 IIR 滤波器(5 阶)高得多；

(3) FIR 滤波器具有严格线性相位特性，而 IIR 滤波器在通带内为近似线性相位特性；

(4) 对不要求严格线性相位特性的应用场合，用 IIR 滤波器可使阶数大大降低。

7-10 用三角窗函数设计一个 FIR 线性相位低通数字滤波器。已知：$\omega_c=0.5\pi$ rad，窗口长度 $N=21$。求出 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$，并画出 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ 的曲线。

解：因为

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{j\omega n}d\omega=\frac{\omega_c}{\pi}\cdot\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\omega_c(n-\alpha)}$$

由题意可知

$$\alpha=\frac{N-1}{2}=10,\quad \omega_c=0.5\pi$$

$$h_d(n)=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(n-10)\right]}{\pi(n-10)}=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}{\pi(n-10)}$$

三角窗函数 $w_{Br}(n)$ 为：

$$w_{Br}(n)=\begin{cases}\dfrac{2n}{N-1}, & 0\leqslant n\leqslant\dfrac{N-1}{2}\\ 2-\dfrac{2n}{N-1}, & \dfrac{N-1}{2}<n\leqslant N-1\end{cases},\quad N=21$$

所以用三角形窗设计的 FIR 线性相位低通数字滤波器单位采样脉冲响应为：

$$h(n)=h_d(n)w_{Br}(n)=\begin{cases}-\dfrac{1}{10}n\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi(n-10)}, & 0\leqslant n\leqslant 10\\ -\left(2-\dfrac{n}{10}\right)\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi(n-10)}, & 10<n\leqslant 20\\ 0, & n\text{ 为其他值}\end{cases}$$

此低通滤波器的单位采样脉冲响应及其幅频响应曲线如图 7-24 所示。

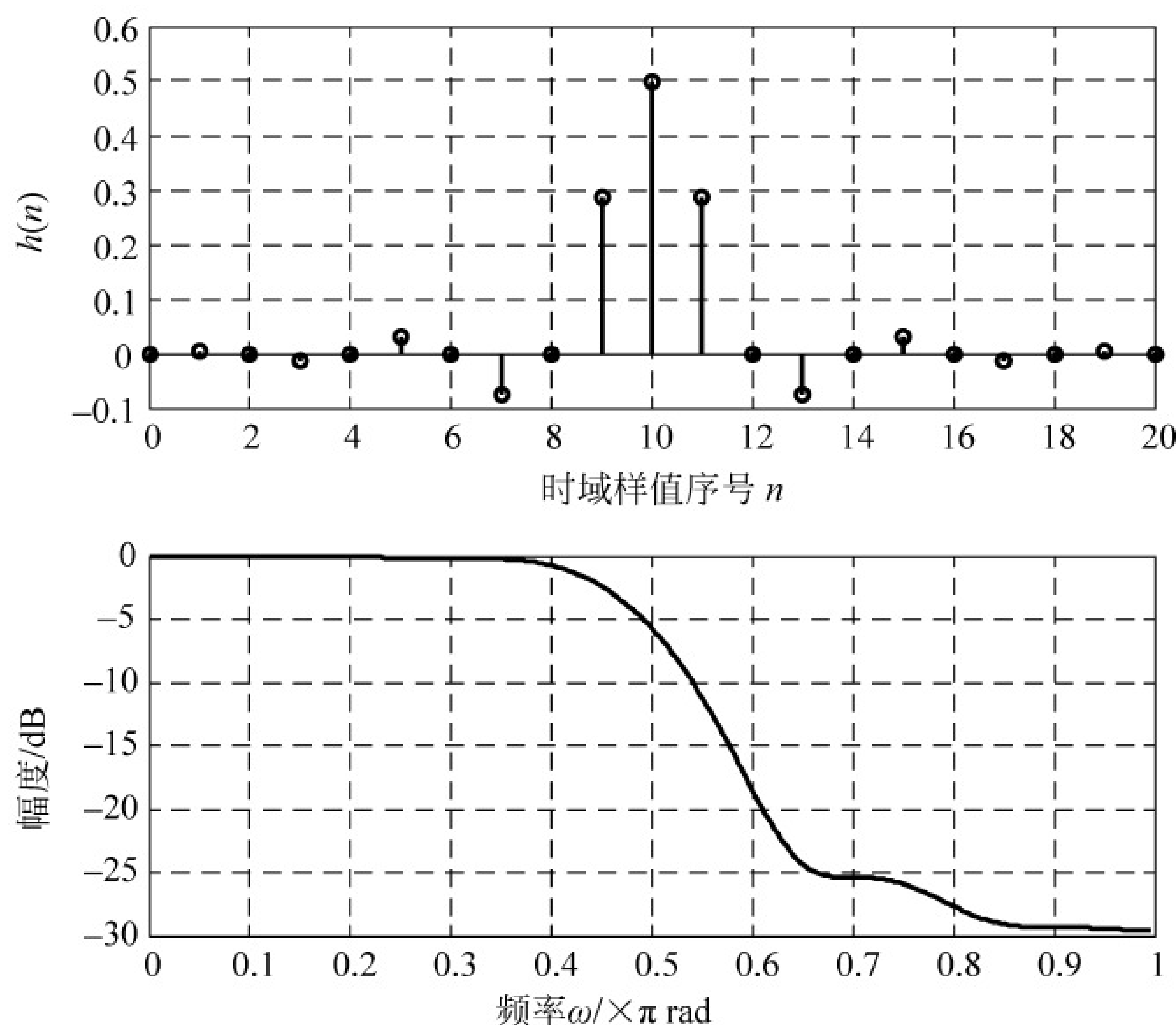


图 7-24　题 7-10 解图

7-11　用汉宁窗函数设计一个线性相位高通滤波器，逼近滤波器的频响特性为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j(\omega-\pi)\alpha}, & \pi-\omega_c \leqslant \omega \leqslant \pi \\ 0, & 0 \leqslant \omega < \pi-\omega_c \end{cases}$$

求出滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 的表达式，确定 α 与窗口长度 N 的关系。写出 $h(n)$ 的值，并画出 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ 的曲线（设：$\omega_c=0.5\pi$ rad，$N=51$）。

解：根据题意有

$$\begin{aligned} h_d(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} e^{-j(\omega-\pi)\alpha}e^{j\omega n}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{j\alpha\pi}\int_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c} e^{j\omega(n-\alpha)}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}e^{j\alpha\pi}\frac{1}{j(n-\alpha)}\left[e^{j\omega(n-\alpha)}\Big|_{\pi-\omega_c}^{\pi+\omega_c}\right] \\ &= \frac{e^{jn\pi}}{j2\pi(n-\alpha)}\left[e^{j\omega_c(n-\alpha)} - e^{-j\omega_c(n-\alpha)}\right] \\ &= e^{jn\pi}\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[(n-\alpha)\omega_c]}{(n-\alpha)\omega_c} \\ &= (-1)^n\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} \end{aligned}$$

汉宁窗函数 $w_{Hn}(n)$ 为

$$w_{Hn}(n) = \sin^2\left(\frac{\pi n}{N-1}\right)R_N(n) = 0.5\left\{1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right\}R_N(n)$$

所以，所设计数字 FIR 高通滤波器的单位采样脉冲响应：

$$\begin{aligned} h(n) &= h_d(n)w(n) \\ &= \begin{cases} \left\{\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)\right]\cdot(-1)^n\frac{\sin[\omega_c(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)}, & 0\leqslant n\leqslant N-1 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases} \end{aligned}$$

按照线性相位滤波器条件，有

$$\alpha = \frac{N-1}{2}$$

代入 $N=51$，得 $\alpha=25$，则

$$h(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi n}{25}\right)\right]\cdot(-1)^n\frac{\sin[0.5(n-25)\pi]}{\pi(n-25)}, & 0\leqslant n\leqslant 50 \\ 0, & n \text{ 为其他值} \end{cases}$$

此高通滤波器的单位采样脉冲响应及其幅频响应曲线如图 7-25 所示。

7-12　用布莱克曼窗函数设计一个线性相位的理想带通滤波器，逼近滤波器的频响特性为

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} je^{-j\omega\alpha}, & -\omega_c \leqslant \omega-\omega_0 \leqslant \omega_c \\ 0, & 0\leqslant\omega<\omega_0-\omega_c,\ \omega_0+\omega_c<\omega\leqslant\pi \end{cases}$$

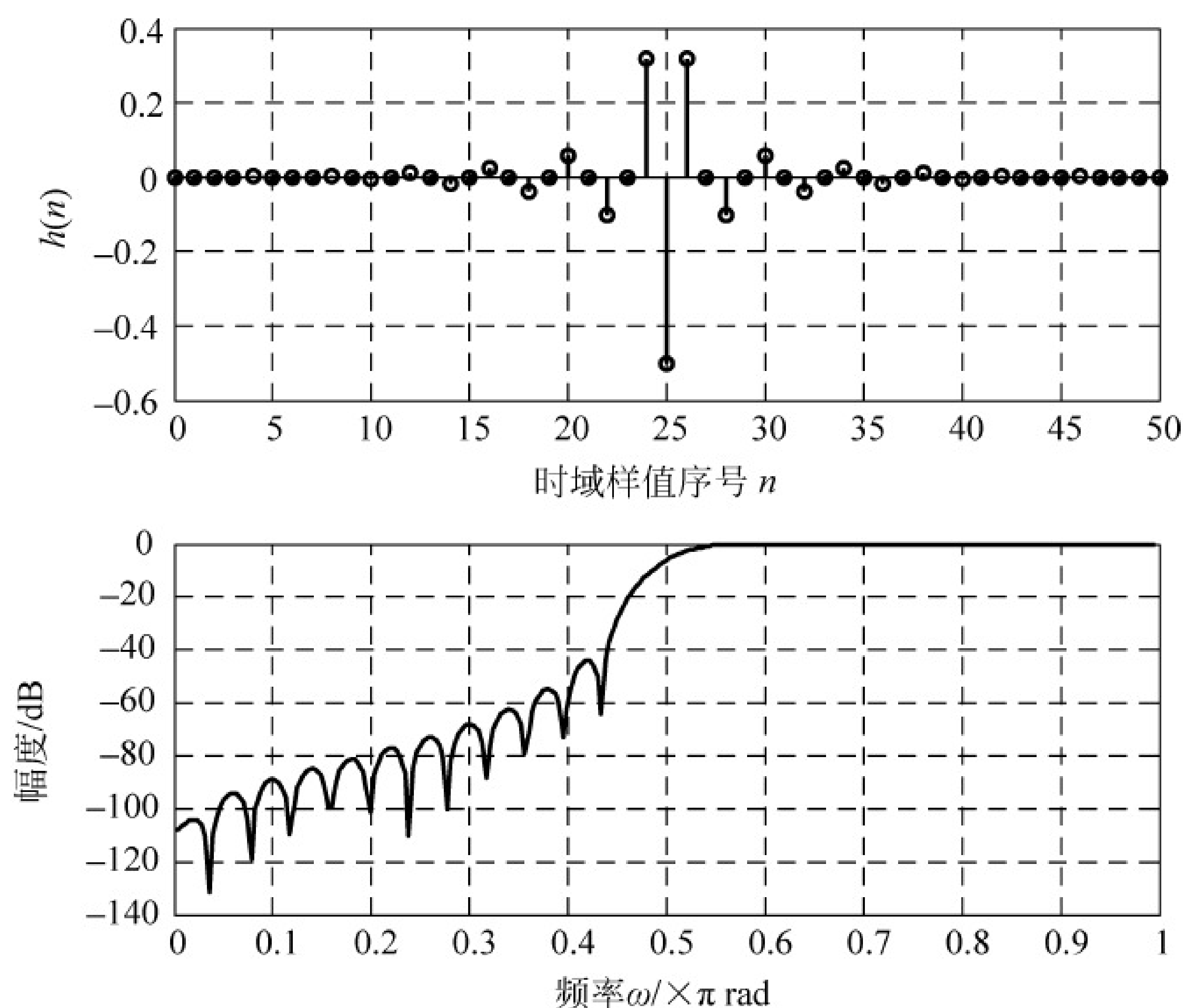


图 7-25 题 7-11 解图

求出 FIR 滤波器的单位采样脉冲响应 $h(n)$ 序列，并画出 $20\lg|H(e^{j\omega})|$ 的曲线。设 $\omega_c=0.2\pi\ \text{rad}$，$\omega_0=0.4\pi\ \text{rad}$，$N=51$。

解：可求得此滤波器的时域理想单位采样脉冲响应为

$$
\begin{aligned}
h_d(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega\\
&=\frac{j}{2\pi}\int_{-\omega_c+\omega_0}^{\omega_c+\omega_0}e^{-j\omega\alpha}e^{jn\omega}d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\omega_0-\omega_c}^{-\omega_0+\omega_c}e^{-j\omega\alpha}e^{jn\omega}d\omega\\
&=\frac{j}{2\pi}\cdot\frac{1}{j(n-\alpha)}\left[e^{j(n-\alpha)(\omega_0+\omega_c)}-e^{j(n-\alpha)(\omega_0-\omega_c)}+e^{j(n-\alpha)(\omega_c-\omega_0)}-e^{j(n-\alpha)(-\omega_c-\omega_0)}\right]\\
&=\frac{j}{\pi(n-\alpha)}\{\sin[(\omega_c+\omega_0)(n-\alpha)]-\sin[(\omega_0-\omega_c)(n-\alpha)]\}\\
&=\frac{2j}{\pi(n-\alpha)}\sin[(n-\alpha)\omega_c]\cos[(n-\alpha)\omega_0]
\end{aligned}
$$

其中，$\alpha=\dfrac{N-1}{2}=25$。

采用布莱克曼窗设计时，$w(n)$ 为窗函数，将 $\omega_c=0.2\pi\ \text{rad}$，$\omega_0=0.4\pi\ \text{rad}$，$N=51$，$\alpha=25$ 代入，得：

$$
h(n)=h_d(n)w(n)
$$

$$
=\begin{cases}\left[0.42-0.5\cos\left(\dfrac{\pi n}{25}\right)+0.08\cos\left(\dfrac{2\pi n}{25}\right)\right]\dfrac{2j}{\pi(n-25)}\sin\left[(n-25)\dfrac{\pi}{5}\right]\times\\ \cos\left[(n-25)\dfrac{2\pi}{5}\right], & 0\leqslant n\leqslant 50\\ 0, & n\text{ 为其他值}\end{cases}
$$

化简：

$$h(n) = \left[0.42 - 0.5\cos\left(\frac{\pi n}{25}\right) + 0.08\cos\left(\frac{2\pi n}{25}\right)\right]\frac{-2\mathrm{j}}{\pi(n-25)}\sin\left(\frac{\pi}{5}n\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5}n\right)R_{51}(n)$$

该带通滤波器的单位采样脉冲响应的虚部序列及其幅频响应曲线如图 7-26 所示。

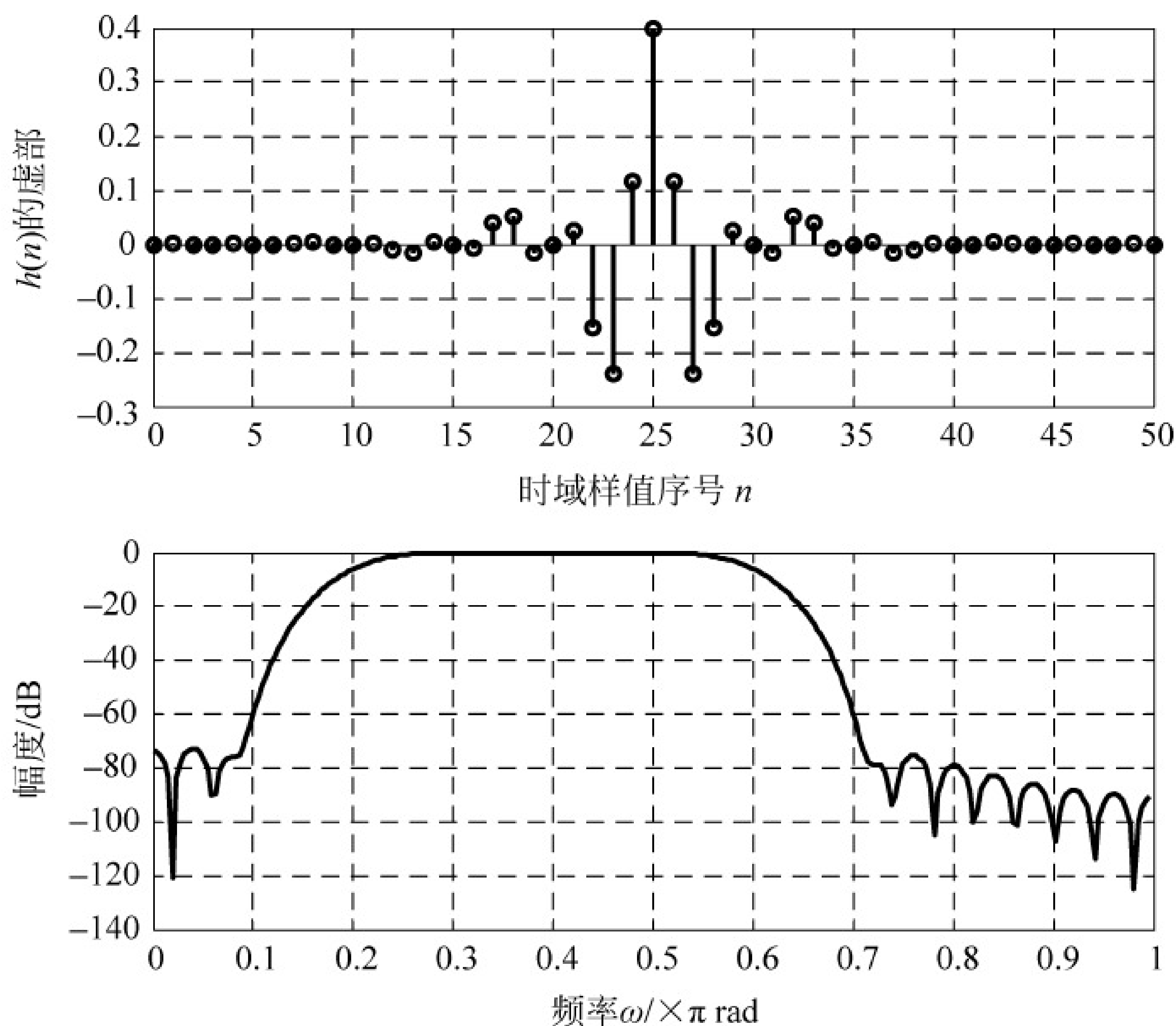


图 7-26 题 7-12 解图

这个滤波器是 90°移相的线性相位带通滤波器(或称正交变换线性相位带通滤波器)。

7-13 如果一个线性相位带通滤波器的频率响应为

$$H_{\mathrm{BP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H_{\mathrm{BP}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

(1) 试证明一个线性相位带阻滤波器可以表示成

$$H_{\mathrm{BS}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = [1 - H_{\mathrm{BP}}(\omega)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}, \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \pi$$

(2) 试用带通滤波器的单位采样脉冲响应 $h_{\mathrm{BP}}(n)$来表达带阻滤波器的单位采样脉冲响应 $h_{\mathrm{BS}}(n)$。

解：

(1) 证明

由于 $H_{\mathrm{BP}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H_{\mathrm{BP}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$,且是线性相位带通滤波器。则不失一般地,设

$$H_{\mathrm{BP}}(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \omega < \omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c < \omega \leqslant \pi \\ 1, & -\omega_c \leqslant \omega - \omega_0 \leqslant \omega_c \end{cases}$$

且 $\varphi(\omega)$是线性相位。又因为

$$H_{\mathrm{BS}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H_{\mathrm{BS}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

当带通滤波器和带阻滤波器的频带边缘 ω_c、滤波器单位采样脉冲响应长 N 相等时,有

$$H_{\mathrm{BS}}(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant \omega < \omega_0 - \omega_c, \omega_0 + \omega_c < \omega \leqslant \pi \\ 0, & -\omega_c \leqslant \omega - \omega_0 \leqslant \omega_c \end{cases}$$

线性相位 BSF 的相位函数 $\varphi(\omega)$也是线性的,例如

$$\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$$

其中，N 为 BPF 和 BSF 的单位采样脉冲响应的长度。因而

$$H_{BS}(\omega)=1-H_{BP}(\omega)$$

所以线性相位带阻滤波器可以表示成

$$H_{BS}(e^{j\omega})=[1-H_{BP}(\omega)]e^{j\varphi(\omega)}$$

（2）由题意可得

$$h_{BP}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H_{BP}(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

可推出

$$\begin{aligned}h_{BS}(n)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[1-H_{BP}(\omega)]e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega n}d\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{j[\varphi(\omega)+\omega n]}d\omega-h_{BP}(n)\end{aligned}$$

考虑到 $\varphi(\omega)$ 的线性特性，有如下结论。

① 当 $\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$ 时，

$$\begin{aligned}h_{BS}(n)&=\frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}e^{j\left(n-\frac{N-1}{2}\right)\omega}d\omega-h_{BP}(n)\\&=\frac{\sin\left\{\left(-\frac{N-1}{2}+n\right)\pi\right\}}{\pi\left(n-\frac{N-1}{2}\right)}-h_{BP}(n)\\&=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}\sin\left[\dfrac{(N-1)}{2}\pi\right]}{\pi\left[n-\dfrac{(N-1)}{2}\right]}-h_{BP}(n), & N=\text{偶数}\\-h_{BP}(n), & N=\text{奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

② 当 $\varphi(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega+\frac{\pi}{2}$ 时，

$$h_{BS}(n)=\begin{cases}\dfrac{j(-1)^{n+1}\sin\left[\dfrac{(N-1)}{2}\pi\right]}{\pi\left[n-\dfrac{(N-1)}{2}\right]}-h_{BP}(n), & N=\text{偶数}\\-h_{BP}(n), & N=\text{奇数}\end{cases}$$

7-14 用雷米兹交替算法设计一带通 FIR 滤波器。要求幅频特性如下：

$$|H_d(e^{j\omega})|=\begin{cases}0, & 0\leqslant|\omega|\leqslant 0.3\pi\text{ rad}, 0.75\pi\text{ rad}\leqslant|\omega|\leqslant\pi\text{ rad}\\1, & 0.35\pi\text{ rad}\leqslant|\omega|\leqslant 0.7\pi\text{ rad}\end{cases}$$

基于 MATLAB 软件，画出单位采样脉冲响应 $h(n)$，并绘出滤波器的幅频特性曲线，再选择不同的幅度加权矢量 $\boldsymbol{w}$，重复设计，观察权矢量的作用。

解：根据 $|H_d(e^{j\omega})|$ 确定归一化边界频率点矢量 $\boldsymbol{f}$ 和理想 BPF 的幅度矢量 $\boldsymbol{m}$：

$$\boldsymbol{f}=[0,0.3,0.35,0.7,0.75,1]$$

$$\boldsymbol{m}=[0,0,1,1,0,0]$$

通过改变权矢量 $\boldsymbol{w}$ 和滤波器阶数（即单位采样脉冲响应点数 N）比较滤波器的逼近精

度。取以下 4 种情况进行比较，绘出滤波器的单位采样脉冲响应和幅频特性曲线依次如图 7-27～图 7-30 所示。

（1）$\boldsymbol{w}=[1,1,1]$，$N=21$　　（2）$\boldsymbol{w}=[1,10,1]$，$N=21$

（3）$\boldsymbol{w}=[4,1,4]$，$N=21$　　（4）$\boldsymbol{w}=[1,10,1]$，$N=33$

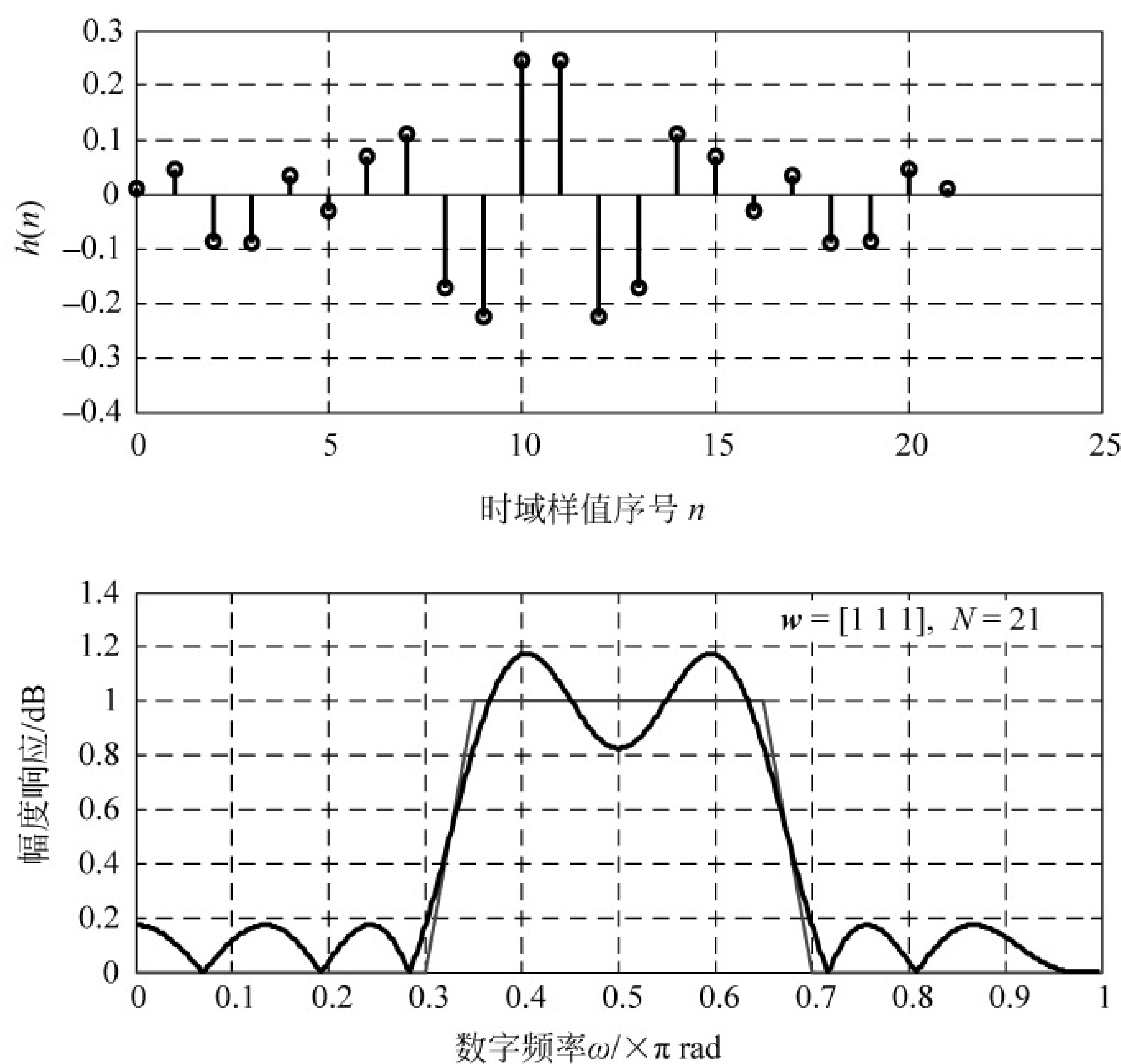


图 7-27　题 7-14 解图一

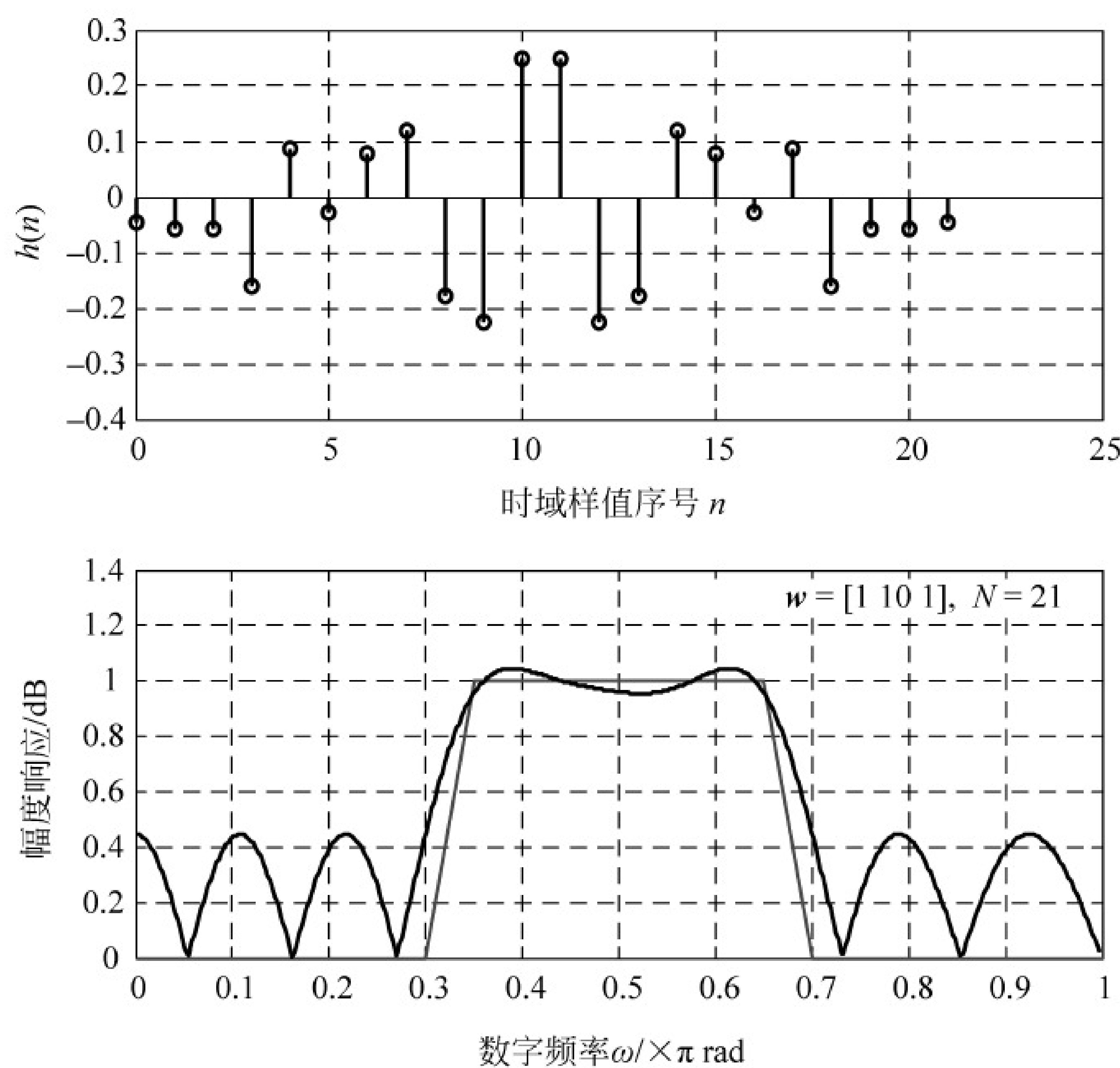


图 7-28　题 7-14 解图二

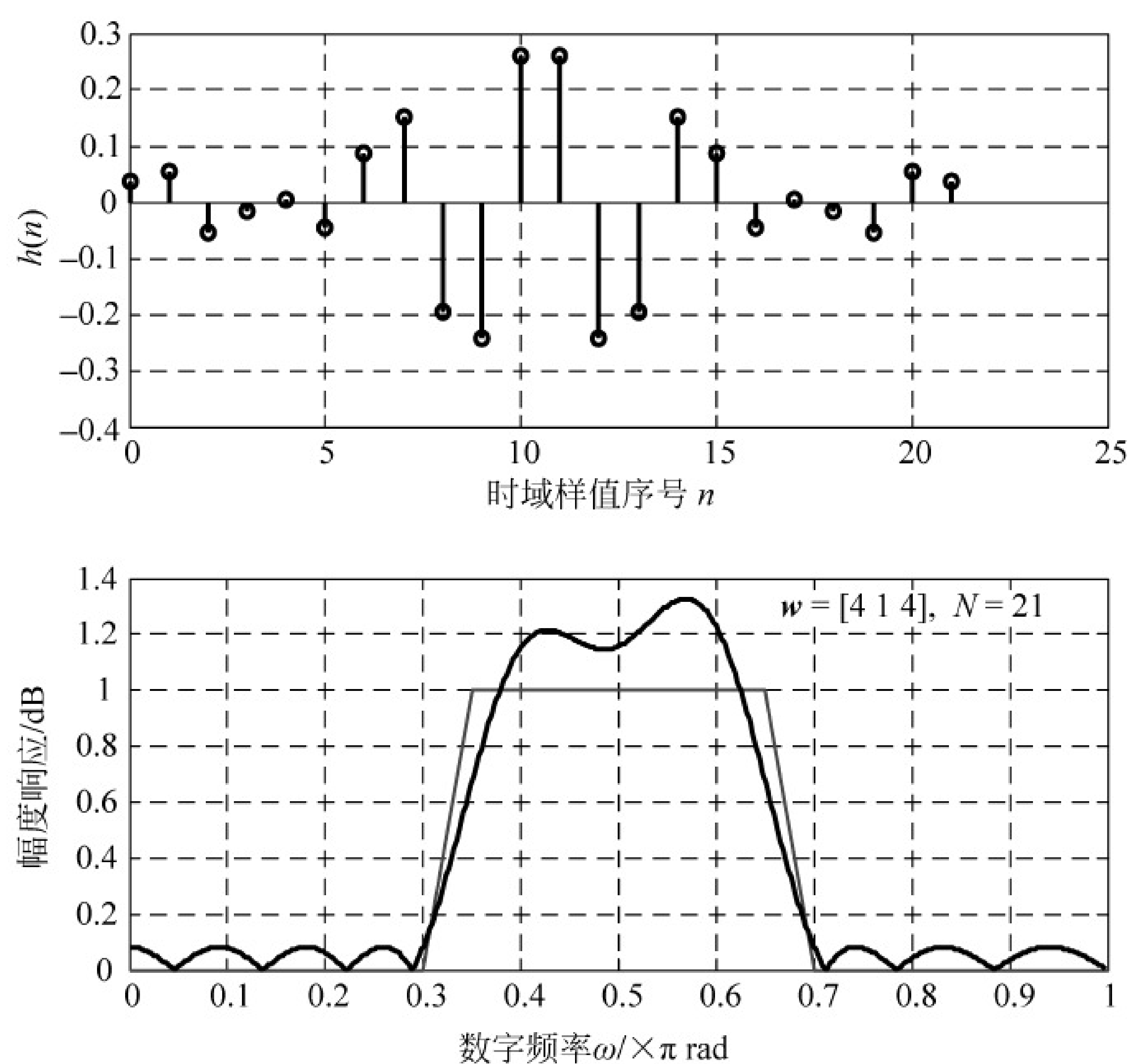


图 7-29 题 7-14 解图三

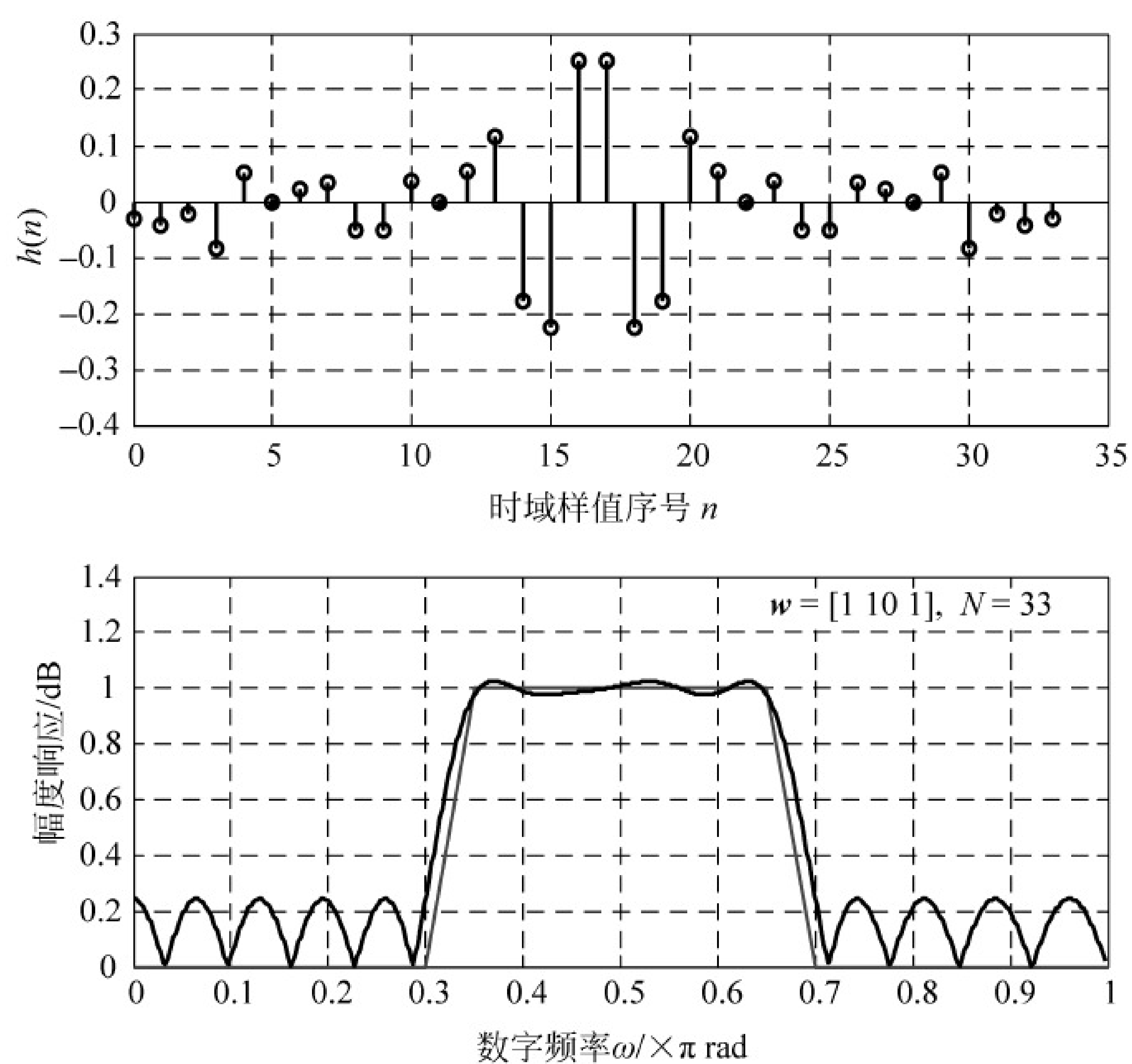


图 7-30 题 7-14 解图四

由图 7-27～图 7-30 可知，权值越大，频段逼近误差越小。相同权值的情况下，滤波器阶数越高，频段逼近误差越小。由图 7-29 可看出，加权函数设计不合理，会使等波纹逼近失效。

参考程序如下：

```
f = [0 0.3 0.35 0.65 0.7 1];
m = [0 0 1 1 0 0];

w = [1 1 1];
N = 21;
h = remez(N,f,m,w);
[H1,w] = freqz(h,1,512);
figure,plot(f,m,'r-- ');hold on
plot(w/pi,abs(H1));hold off;
title('图 a (w = [1 1 1],N = 21')
grid

w = [1 10 1];
N = 21;
h = remez(N,f,m,w);
[H1,w] = freqz(h,1,512);
figure,plot(f,m,'r-- ');hold on
plot(w/pi,abs(H1));hold off;
title('图 b (w = [1 10 1],N = 21')
grid

w = [4 1 4];
N = 21;
h = remez(N,f,m,w);
[H1,w] = freqz(h,1,512);
figure,plot(f,m,'r-- ');hold on
plot(w/pi,abs(H1));hold off;
title('图 c (w = [4 1 4],N = 21')
grid

w = [1 10 1];
N = 33;
h = remez(N,f,m,w);
[H1,w] = freqz(h,1,512);
figure,plot(f,m,'r-- ');hold on
plot(w/pi,abs(H1));hold off;
title('图 d (w = [1 10 1],N = 33')
grid
```

参 考 文 献

[1] 李莉，魏爽，俞玉莲. 数字信号处理原理和算法实现[M]. 3 版. 北京：清华大学出版社，2018.
[2] 李莉，俞玉莲，张倩，等. 数字信号处理实验教程（双语教材）[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2015.
[3] 丁玉美，高西全. 数字信号处理[M]. 2 版. 西安：西安电子科技大学出版社，2001.
[4] Orfanidis S J. Introduction to Signal Processing[M]. 影印版. 北京：清华大学出版社，1996.
[5] Joyce van de Vegte. 数字信号处理基础[M]. 英文版. 北京：电子工业出版社，2003.
[6] McClellan J H，et al. 数字信号处理引论[M]. 英文影印版. 北京：科学出版社，2003.
[7] 方勇. 数字信号处理——原理与实践[M]. 北京：清华大学出版社，2006.
[8] Vinay K Ingle. 数字信号处理及其 Matlab 实现[M]. 陈怀琛，等译. 北京：电子工业出版社，1998.
[9] 程佩青. 数字信号处理教程[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2001.
[10] 高西全，丁玉美. 数字信号处理（第二版）学习指导[M]. 西安：西安电子科技大学出版社，2001.
[11] 胡广书. 数字信号处理题解及电子课件[M]. 北京：清华大学出版社，2007.
[12] 程佩青. 数字信号处理教程习题分析与解答[M]. 3 版. 北京：清华大学出版社，2007.
[13] 赵健，李毅，杨菊平. 数字信号处理学习辅导[M]. 北京：清华大学出版社，2006.
[14] 方勇. 数字信号处理学习指导与习题详解[M]. 北京：清华大学出版社，2008.
[15] 邓立新，曹雪虹，张玲华. 数字信号处理学习辅导及习题详解[M]. 北京：电子工业出版社，2003.
[16] 张延华，姚林泉，郭玮. 数字信号处理——基础与应用[M]. 北京：机械工业出版社，2005.
[17] 陈桂明，张明照，戚红雨. 应用 MATLAB 语言处理数字信号与数字图像[M]. 北京：科学出版社，2000.
[18] 余成波，陶红艳，杨菁，等. 数字信号处理及 MATLAB 实现[M]. 2 版. 北京：清华大学出版社，2008.
[19] 吴新余，周井泉，沈元隆. 信号与系统——时域、频域分析及 MATLAB 软件的应用[M]，北京：电子工业出版社，1999.
[20] 高俊斌. MATLAB 5.0 语言与程序设计[M]. 武汉：华中理工大学出版社，1999.